"*Wir müssen wissen, wir werden wissen*
(Debemos conocer, y conoceremos)". D. Hilbert.

**David Hilbert** en 1900[1]. Este año pronuncia el famoso discurso de París, en el que propone 23 problemas matemáticos que pasarían a la historia.

## 5. 8 – David Hilbert y el formalismo.

Cuando David Hilbert (1862-1943) entró al tema de los fundamentos de las matemáticas alrededor de 1910, su obra relacionada con el tema de formalización ya era bien conocida, como veíamos en las primeras exposiciones relacionadas con la formalización de la geometría y de la teoría de números. El nombre de David Hilbert lo escuchamos mucho y lo seguiremos escuchando en ambientes matemáticos cultos, porque aparte de sus monumentales contribuciones a las matemáticas, también mantuvo una poderosa influencia en los círculos académicos de Europa, al liderar toda una escuela matemática centrada en la Universidad de Gotinga, Alemania[2].

Aunque a fines del siglo XIX ya existía una corriente formalista a la que Frege controvertía en el segundo volumen de su obra *Grundgesetze der Arithmetik* de 1903, sin embargo, el concepto moderno de formalismo que incluye las técnicas del razonamiento finitista debemos atribuirlo a Hilbert y a sus discípulos. Actualmente la mayor parte de los textos de lógica moderna están relacionados con el formalismo. Esto hace que este enfoque sea más conocido que sus contrapartes logicista e intuicionista. Para entender el contexto donde se desarrolla el formalismo, tratemos de dar respuesta a una serie de preguntas relacionadas con los procedimientos involucrados en el proceso de formalizar una determinada teoría.

***Primera pregunta***: *¿Qué es aquello que se formaliza, cuando de formalizar se trata*?
La respuesta es: formalizamos aquellas teorías (= Sistemas de axiomas dentro de un lenguaje *L* dado) que previamente han sido axiomatizadas. Debemos hacer claridad entonces, sobre la diferencia entre la axiomatización y la formalización. Euclides axiomatizó la geometría alrededor del año 300 AC, pero la formalización empezó 2200 años después, con los logicistas y los formalistas de fines del siglo XIX. Ejemplos de teorías axiomatizadas son: la geometría plana con los axiomas de Euclides, la

---

[1] Foto tomada de Internet en: http://www-groups.dcs.st-and.ac.uk/~history/PictDisplay/Hilbert.html
[2] Para una descripción general de esta escuela y sus protagonistas ver mi artículo "David Hilbert y su Escuela", en: http://www.matematicasyfilosofiaenelaula.info/David%20Hilbert%20y%20su%20Escuela.%20matematica_ense_anza_1978.doc

aritmética (teoría de números) con los axiomas de Peano, la teoría de conjuntos con los axiomas de Fraenkel, Zermelo y Skolem, la teoría de probabilidades con los axiomas de Kolmogórov, etc.

***Segunda pregunta:*** *¿Cómo formalizamos una teoría axiomatizada*?
Supongamos que se nos da una teoría axiomatizada T. Restringiéndonos sólo a lógica de primer orden, *formalizar* T significa, escoger un lenguaje *L* apropiado de primer orden para T. El vocabulario para un lenguaje de primer orden consiste de cinco componentes, llamémoslos aquí, términos. Cuatro de ellos son siempre los mismos y no dependen de la teoría T. Estos primeros cuatro términos son:

1) *UNA LISTA ENUMERABLE DE VARIABLES.* Su número puede ser infinito, pero de cardinal igual a $\aleph_o$, el cardinal de los números naturales.

2) *LOS SÍMBOLOS PARA LAS CONECTIVAS*: ($\neg$) para la negación, ($\wedge$) para la conjunción, ($\vee$) para la disyunción (o inclusivo), ($\rightarrow$) para la implicación y ($\leftrightarrow$) para la equivalencia o doble implicación. Estas conectivas son realmente las mismas de nuestro lenguaje usual.

3) *EL SIGNO* (=) *PARA LA IGUALDAD*, imprescindible en la notación matemática.

4) *LOS CUANTIFICADORES*: ($\forall$) universal y ($\exists$) el existencial.

5) *TÉRMINOS INDEFINIDOS* (o *PARÁMETROS*). Como hemos supuesto que T es una teoría axiomatizada, T trae implícitos ciertos "términos indefinidos" o a veces también denominados "elementos primitivos"; a los que usualmente les asignamos sus respectivos símbolos. Estos símbolos, uno por cada término indefinido de la teoría axiomatizada T, usualmente se denominan *parámetros* del lenguaje de primer orden *L*. Este conjunto de símbolos corresponde al quinto término del vocabulario de nuestro lenguaje *L* para la teoría T. Por ejemplo, entre los términos indefinidos de la geometría plana de Euclides, aparece *punto, recta, interestancia, incidencia,* etc. y para cada uno de ellos usamos símbolos apropiados para completar el vocabulario del lenguaje de primer orden *L*.

OTROS EJEMPLOS. Entre los términos indefinidos de la aritmética, en la axiomatización de Peano, aparece *cero, suma* y *multiplicación*, y para ellos uno escoge como sus símbolos, 0, + y $\times$ respectivamente. La teoría de conjuntos más fácil de formalizar es, la de Fraenkel-Zermelo (FZ), por cuanto que esta teoría, no tiene sino un solo término indefinido, esto es, la relación de pertenencia que simbolizamos como "$\in$".

Puesto que los parámetros son los únicos símbolos en el vocabulario de un lenguaje de primer orden que dependen de la teoría previamente axiomatizada T, entonces, uno formaliza T simplemente escogiendo estos parámetros. Una vez hecha esta escogencia, la totalidad de la teoría T queda completamente formalizada. Uno puede ahora expresar en el lenguaje de primer orden resultante *L*, no sólo los axiomas, definiciones y teoremas de T, si no mucho más. Uno puede expresar en el lenguaje *L*, todos los axiomas de la lógica clásica y desde luego, también toda la argumentación que uno usa en la prueba de los teoremas de la teoría T. Resumiendo, uno puede ahora proseguir enteramente con *L*; es decir, "formalmente".

***Tercera pregunta***: *¿Por qué universalmente se busca formalizar una teoría axiomatizada*? En el caso de Euclides, por ejemplo, no parece necesario formalizar su geometría ya axiomatizada. La importancia de esta pregunta radica en que, ocurren situaciones a veces, donde se hace mala interpretación, del propósito real de la formalización. Este fue el caso de Geuseppe Peano (1858-1932) que usó lenguaje formal (muy cercano a un lenguaje de primer orden) en la publicación de uno de sus más importantes artículos sobre ecuaciones diferenciales, donde se notan errores en el propósito de la formalización. Su artículo[3] era ilegible, hasta que alguien le hizo el favor de traducirlo al alemán, un lenguaje corriente a través del cual, se pudo valorar la importancia del tema en la teoría de las ecuaciones diferenciales.

Tratemos de dar respuesta a la tercera pregunta. Supongamos que un matemático investiga cierta rama de las matemáticas, digamos por ejemplo, la geometría euclidiana. Su interés estará centrado en descubrir y probar importantes teoremas geométricos. Para esa clase de trabajo técnico, la formalización, no sirve de ayuda, y más grave aún, estorba o entorpece la labor del investigador. Sin embargo, si uno hace preguntas sobre los fundamentos de la geometría; como: "¿Por qué esta rama de las matemáticas está libre de contradicciones?", entonces, la formalización, no sólo es de gran ayuda, sino de una necesidad absoluta.

Fue necesario el golpe de genio de Hilbert para entender que la formalización era el camino a seguir para responder las preguntas que surgen en torno a los fundamentos de las matemáticas. Lo que él nos enseñó puede sintetizarse en lo siguiente. Supongamos que T es una teoría axiomatizada, formalizada en términos de un lenguaje de primer orden L. Este lenguaje tiene una sintaxis precisa susceptible de estudiarse a su vez como un objeto matemático. Por ejemplo, uno pregunta: "¿Se puede desembocar en una contradicción si se procede formalmente en L, usando sólo los axiomas de T y los correspondientes de la lógica, previamente expresados en L?". Si se logra probar matemáticamente que la respuesta es no, quedaría demostrado matemáticamente que la teoría T está libre de contradicciones.

En esto consistía básicamente el famoso "Programa de Hilbert". La idea era formalizar las diferentes ramas de las matemáticas y entonces probar matemáticamente que, cada una de ellas, así formalizada, estaba libre de contradicciones. En efecto, si por medio de esta técnica, los formalistas hubieran podido mostrar que la teoría de conjuntos ZF carecía de contradicciones, ellos habrían logrado el objetivo de probar que todas las ramas de las matemáticas clásicas también estarían libres de contradicciones, puesto que las matemáticas clásicas pueden deducirse de los axiomas ZF. Resumiendo: los formalistas trataron de crear técnicas matemáticas mediante las cuales probar que las matemáticas estaban libres de contradicciones. Este fue el propósito inicial del formalismo. Hay que destacar que, tanto formalistas como logicistas, formalizaron las diversas ramas de las matemáticas, pero por razones de distinta índole. Los logicistas buscaban esa formalización para mostrar que la rama de las matemáticas en cuestión pertenecía a la lógica; los formalistas, por su parte, hicieron lo propio para probar que esa rama específica de las matemáticas estaba libre de contradicciones. Entendidas así las dos escuelas (formalizadas), aparentemente, una se confunde con la otra.

[3] El teorema de Peano hacía referencia a la existencia de soluciones de la ecuación diferencial $y' = f(x,y)$, donde $f$ es una función continua.

***Cuarta Pregunta***: *¿Lograron los formalistas llevar su programa a feliz término*? La respuesta infortunadamente es no. En 1931, Kurt Gödel mostró que la formalización no puede considerarse como una técnica matemática, a través de la cual pueda uno probar que las matemáticas están exentas de contradicciones. El teorema en aquel artículo, que prendió las alarmas en el programa de Hilbert es extensivo a teorías axiomatizadas que estén exentas de contradicciones y cuyos axiomas sean lo suficientemente fuertes como para hacer aritmética en términos de ellos. Teorías que satisfacen este requisito son por ejemplo, la aritmética de Peano y la teoría de conjuntos ZF.

Supongamos que T es tal teoría y que T se ha formalizado por medio de un lenguaje de primer orden L. Entonces el teorema de Gödel dice en términos no técnicos: "***Ninguna proposición en L, que pueda interpretarse como aseveración de que T está libre de contradicciones, puede probarse formalmente en el mismo lenguaje L***".

Aunque la interpretación de este teorema se presta a controversias, la mayoría de matemáticos ha concluido a partir de él, que el programa de Hilbert no puede llevarse a cabo. Dicho en otras palabras, *las matemáticas no están en capacidad de demostrarse a si mismas que están libres de contradicciones*. He aquí entonces, la tercera crisis de los fundamentos de las matemáticas. No obstante ser el teorema de Gödel un duro revés para el programa de Hilbert, el formalismo no ha perdido, ni su vigencia, ni su importancia, como puede verse en las matemáticas contemporáneas, donde, en el marco formalista se ha desarrollado la lógica matemática moderna incluyendo ramas tan importantes como la teoría de modelos, la teoría de funciones recursivas, etc.

La *Escuela Bourbaki*, establecida en los años treintas del siglo XX por matemáticos egresados de la Escuela Normal Superior de París, acogería el formalismo como marco para el desarrollo de sus matemáticas. Su formalización de la teoría de conjuntos es similar a lo establecido por Zermelo-Fraenkel. A la Escuela Bourbaki hay que recordarla, al menos, por la introducción del símbolo $\varnothing$ para denotar el conjunto vacío. Este símbolo corresponde a una de las vocales del alfabeto noruego, tomado, posiblemente, en honor del matemático Thoralf Skolem (1887-1963), nativo de ese país y que contribuyó a la axiomatización de esta teoría. El símbolo fue escogido por André Weil, como lo manifiesta en una de sus obras[4].

El formalismo, el logicismo y el intuicionismo, tienen su fundamento en la filosofía, pero las raíces filosóficas del formalismo no son tan visibles como lo son en los casos de sus contrapartes, el logicismo y el intuicionismo. Desde luego que uno puede encontrarlas, pero reflexionando más fino en torno al programa de Hilbert.

Sea de nuevo T una teoría axiomatizada, formalizada en términos de un lenguaje de primer orden *L*. Para llevar a cabo el programa de Hilbert, se debe hablar sobre el lenguaje *L* como un objeto de estudio, y mientras se hace esto, uno no está hablando en la seguridad de ese mismo lenguaje *L*. Al contrario, uno está hablando acerca de *L* en lenguaje ordinario, digamos en nuestro caso, en español corriente. Mientras usemos nuestro lenguaje corriente y no lenguaje formal *L*, hay, desde luego, peligro de contradicciones, por cuanto, pueden eventualmente deslizarse errores. Hilbert decía que la forma de evitar el peligro que estos errores se introduzcan, era teniendo la certeza que, mientras uno habla en su lenguaje natural, acerca de *L*, sólo se usen razonamientos absolutamente seguros y libres de cualquier clase de sospecha. El llama a éstos: *razonamientos finitistas*, pero desde luego dando

[4] WEIL, A. *The Apprenticeship of a Mathematician*. Birkhäuser Verlag. Basilea, Boston, Berlin. 1992. Pág. 114.

previamente, una definición previa. La definición más conocida es la del matemático francés Jacques Herbrand (1908-1931). Tomemos un receso para referirnos cortamente a la brevísima vida de Herbrand (sólo veintitrés años) un matemático, digno émulo de su coterráneo, el genial Evariste Galois (1811-1832).

**Jacques Herbrand.** Estudió en la Escuela Normal Superior de Paris y a la edad de veintiún años ya tenía en su haber el título de doctor. Al tiempo de su muerte era estudiante en Gotinga bajo la dirección de la gran matemática alemana y alumna de Hilbert, Emmy Noether. Herbrand introdujo el concepto de funciones recursivas en su tesis de doctorado sobre *teoría de la prueba*, un tema muy arraigado en el gusto de Hilbert. Contribuyó al programa de Hilbert en lo atinente a los fundamentos de las matemáticas, al presentar una prueba constructiva de consistencia para un sistema débil de la aritmética. La prueba hace uso del hoy llamado teorema de Herbrand en teoría de la prueba, teorema probado por él en su tesis de grado. En Berlín fue estudiante de John von Neumann y en Hamburgo, de Emil Artin, ambos, matemáticos de gran figuración. Al tiempo de su muerte trabajaba con Emmy Noether en teoría de anillos de clase. En 1931 envió a publicación su artículo "Sobre la consistencia de la Aritmética". Ese mismo año apareció el trabajo de Gödel "Sobre la indecibilidad formal de proposiciones en *Principia Mathematica* y sistemas relacionados I", que anunciaba la prueba de la imposibilidad de formular, dentro de una teoría, una prueba de su propia consistencia. Herbrand alcanzó a estudiar el trabajo de Gödel, y escribió un apéndice a su artículo en proceso de publicación, donde mostraba que las conclusiones del matemático austriaco, no afectaban su artículo *Sobre la consistencia de la Aritmética.* Este artículo fue publicado póstumamente. Su muerte se produjo en un accidente mientras escalaba en los Alpes franceses.

***Los razonamientos finitistas.*** La definición de razonamiento finitista con los ajustes que resultan del cambio de "intuicionista" por "finitista", quedaría así:

Un argumento finitista es aquel argumento que satisface las condiciones siguientes:

1) En él, nunca consideraremos nada distinto a un número finito de objetos y de funciones: estas funciones estarán bien definidas en el sentido de que sus valores sean calculados en forma unívoca.
2) Nunca exhibiremos un objeto sin antes dar un procedimiento para construirlo.
3) Nunca consideraremos la totalidad de objetos $x$ de una colección infinita.
4) Cuando digamos que un argumento (o un teorema) es verdadero para todos los objetos $x$ de una colección finita, estamos significando que para cada $x$ tomado separadamente, es posible repetir el argumento general en cuestión, que a su vez debe considerarse meramente como el prototipo de estos argumentos particulares.

Es fácil observar que esta definición usa lenguaje filosófico, y no matemático. Aún así, nadie puede afirmar que entiende el programa de Hilbert sin asimilar, la conceptualización de razonamiento finitista.

Las raíces filosóficas del formalismo salen a la luz cuando, los formalistas definen qué es, lo que ellos significan, cuando se refieren a un razonamiento finitista.

Hemos asociado logicismo con realismo e intuicionismo con conceptualismo. La corriente filosófica más próxima al formalismo vendría a ser el *nominalismo*. Esta corriente sostiene que las entidades abstractas no tienen existencia de ninguna especie, ni fuera de la mente humana, como sostiene el realismo, ni como construcciones de la mente humana, según la apreciación del conceptualismo. Para el nominalismo, las entidades abstractas son meras exclamaciones vocales o líneas escritas, sólo son nombres. De allí, el término nominalismo, del latín *nominalis* que significa "perteneciente a un nombre".

Similarmente, cuando los formalistas tratan de probar que cierta teoría axiomatizada T está libre de contradicciones, no estudian las entidades abstractas que ocurren en T, si no, mas bien, el lenguaje de primer orden *L,* el cual se usa para formalizar T. Esto es, estudian cómo se forman las frases en *L* a través del uso apropiado de su vocabulario: cómo ciertas frases, o mejor, sentencias, pueden probarse con el uso apropiado de aquellas sentencias de *L*, que fueron rotuladas como axiomas; y, en particular, tratan de mostrar que, ninguna sentencia de *L* puede ser probada y disprobada al mismo tiempo, puesto que por medio de ellas se habría establecido que la teoría original estaría, o no, libre de contradicciones. El punto importante es que el estudio total de *L,* es un estudio estrictamente sintáctico, ya que ninguna entidad abstracta o un significado se ha asociado con las sentencias de *L*.

El lenguaje se investiga considerando las sentencias o frases de *L* como expresiones sin significado, que se manipulan según reglas sintácticas explicitas, justamente como se manipulan las piezas del ajedrez, que son figuras sin significado que se mueven de acuerdo a las reglas fijas del juego. Para el formalista estricto, *hacer matemáticas* es *manipular símbolos sin significado de un lenguaje de primer orden, según reglas sintácticas explicitas*. Por lo tanto, el formalista estricto no trabaja con entidades abstractas, tales como series infinitas o cardinales, sino solamente con sus nombres carentes de significado que son las expresiones apropiadas en el lenguaje de primer orden. Tanto formalistas como nominalistas evitan el uso directo de entidades abstractas, y es en virtud de esta postura que se hace la comparación del formalismo con el nominalismo.

El hecho de resaltar la comparación del logicismo, intuicionismo y formalismo con el realismo, el conceptualismo y el nominalismo, respectivamente lo hizo el filósofo norteamericano Willard van Orman Quine (1908-2000)[5].

Willard Quine fue un filósofo norteamericano discípulo de Alfred N. Whitehead y uno de los grandes filósofos y pensadores del siglo XX. La Academia de Ciencias de Suecia lo exaltó con el Premio *Rolf Schock* de Lógica y Filosofía.

**Jacques Herbrand** (1908-1931), fue un ser fuera de lo común, de capacidades intelectuales extraordinarias y al igual que Évariste Galois, con una vida corta pero muy productiva. Se graduó con una tesis en lógica, en la Escuela Normal Superior de París, escuela famosa, por las celebridades matemáticas formadas allí.

**Siguiente Sección: *Los Teoremas de Gôdel***

[5] BENACERRAF, P. et al. *Philosophy of Mathematics*. Prentice Hall, New York. 1964.