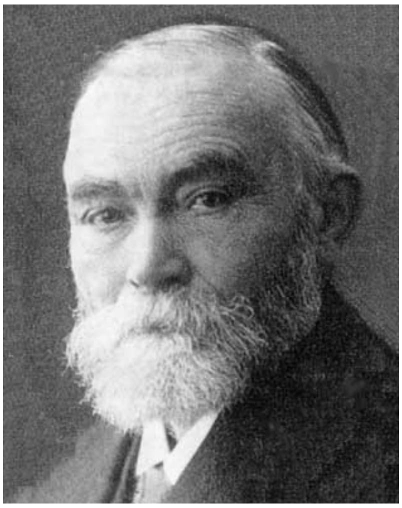
"*Dios hizo los enteros. Todo lo demás es obra del hombre*". L. Kronecker.

2.5 - Los Números Naturales y el concepto de Buena Ordenación.

La concepción de número en la filosofía pitagórica, se inicia con la *mónada* (la unidad) o el *divino generador de todos los números*. Partiendo de la mónada se construyen los restantes números naturales, Partiendo de éstos, a través del logos, se encuentran los números racionales positivos como cociente módulo **m/n**, de las clases de equivalencia, donde numerador y denominador son números naturales[1]. Al extender estas clases y fracciones de tal manera que incluyan enteros (positivos, negativos y cero) en la escogencia de **m** y **n,** con **n** diferente de 0, aparece el conjunto **Q** de los números racionales.



Friedrich Ludwig Gottlob Frege (1848-1926), es considerado uno de los grandes lógicos, al lado de Aristóteles, Bertrand Russell, Alfred Tarski y Kürt Gödel. Foto tomada de Internet.

Como se mostró en la sección anterior los números racionales no resuelven el problema de la conmensurabilidad, por lo que **Q** no es suficiente para representar las magnitudes que aparecen en geometría.

A aquellos números asociados a magnitudes inconmensurables, los primeros pitagóricos los denominaron, según Platón[2], *arretos* (αρρετος) o sea *lo secreto* o *el misterio inefable*. Es, en este punto de la historia, donde se logra un rompimiento importante en la génesis de los números, por cuanto que, los números naturales resultaron insuficientes para la aritmetización de la geometría. Esta inconsistencia dio origen a una nueva formulación del concepto de proporción que debía involucrar también magnitudes inconmensurables asociadas a números irracionales. La definición dada por Eudoxio de proporción, generó una dinámica nueva que abarca campos más allá de las matemáticas, como es el caso de la filosofía. Tanto Platón como Aristóteles se interesaron en el tema, a tal punto que es a través de la obra del segundo que conocemos la prueba de la irracionalidad de $\sqrt{2}$; y del primero tenemos información relacionada con la existencia de otros irracionales como $\sqrt{3}$, $\sqrt{5}$, y otros, descubiertos por el matemático griego Theeteto[3]. Las inquietudes de Platón fueron más allá de la simple descripción de los números irracionales. Después de descomponer el cuadrado en triángulos, tomó el triángulo de hipotenusa $\sqrt{2}$ y de lado uno y el triángulo resultante del cubo unitario, de diagonal $\sqrt{3}$ y se propuso representar todas la magnitudes, racionales e irracionales como combinación de la unidad y los irracionales $\sqrt{2}$ y $\sqrt{3}$. Esto es, representar todas las magnitudes en la forma $\boldsymbol{k} + \boldsymbol{m}\sqrt{2} + \boldsymbol{n}\sqrt{3}$, con ***k, m*** y ***n*** variando en los números naturales. Desde luego en nuestra perspectiva actual, esto no es posible, pero representa un esfuerzo en el camino hacia la representación de todos los números reales en forma algebraica. Platón observó que hasta π podía aproximarse muy bien, como $\sqrt{2} + \sqrt{3}$.[4]

La extensión de los números naturales a los números enteros no fue tan traumática como lo fue, la extensión de los racionales a los irracionales. Los números enteros nacen naturalmente al intentar

---

[1] Ver sección 2.4.

[2] POPPER, K. R. *The Open Society and Its Enemies.* Vol. I. Pág. 251. Princeton University Press. Princeton, N. J. 1971.

[3] Theeteto (417-369 AC) fue discípulo de Theodoro de Cyrene y un matemático griego de los mayores quilates. Fue quien descubrió el Dodecaedro y el icosaedro, dos de los llamados sólidos de Platón. Contribuyó a la teoría de los números irracionales y se cree que parte de los libros X, XI y XIII de los *Elementos* de Euclides es obra suya.

[4] POPPER, K. R, *Op. Cit.* Pág. 253.

resolver la ecuación lineal $x + a = b$, con a y b números naturales, cuya solución no siempre es un número natural. La solución $x = b - a$, será un número natural si $b > a$. La inclusión del cero en los sistemas numéricos es relativamente reciente[5] y vino con el sistema hindú-arábigo de numeración, en los trabajos de Al-Khowaritzmi (*ca. 825*). Su popularización en Europa se dio principalmente por la obra de Leonardo Fibonacci, *Liber Abaci* (1202). Si permitimos que $b = 0$, la solución a la ecuación dada es $x = -a$. Esto muestra que con cada natural a hay asociado un entero $-a$ que es solución de la ecuación $x + a = 0$. Este entero, se conoce como el inverso aditivo de a, que junto al 0, juega un papel importante en la estructura de los números enteros, vistos como un grupo.

La teoría de números iniciada por los pitagóricos, recibió el impulso en los comienzos de nuestra era, de uno de los grandes en el tema, como fue Diofanto de Alejandría (III siglo DC). En su obra *Aritmética*, Diofanto inicia el estudio de las ecuaciones con soluciones en los números racionales. Hoy llamamos a las ecuaciones polinómicas con soluciones enteras, ecuaciones diofantinas. Es además con Diofanto que se inicia el álgebra simbólica, pues fue él, quien introdujo por primera vez un simbolismo (algebra sincopada) para designar incógnitas y algunas operaciones en los procesos algebraicos. Parte de la obra de Diofanto llegó a nosotros en versiones preservadas por los árabes, mientras otras partes se encuentran desaparecidas. La *Aritmética* de Diofanto está ligada al *Último Teorema de Fermat,* en razón a que, Fermat escribió al margen de su copia, en la edición de Claude Gaspard Bachet (1621), el teorema demostrado por Andrew Wiles en 1994, de que no existen enteros *x, y, z* que satisfagan $x^n + y^n = z^n$, para enteros, n > 2. ([6])

El conjunto de los números enteros se denota por **Z** (de la palabra *zahl,* que en alemán, significa número) posiblemente por convención originada en matemáticos alemanes muy famosos, todos ellos del siglo XIX, como Johann Carl Friedrich Gauss (1777-1855), Jacobi, Kronecker, Kummer, Dirichlet, Dedekind y Eisenstein, para quienes la teoría de números era *Zahlentheorie.* Con la aparición de los números enteros, el conjunto de los números naturales pasa a segundo plano, porque la teoría que se hace en los enteros es más amplia y más rica que la que pueda hacerse en los naturales. Los naturales pasan a ser los enteros positivos que son un subconjunto de **Z.**

Los trabajos de Richard Dedekind y de Gottlob Frege en Alemania, y los de Giussepe Peano en Italia estuvieron orientados a dar un alumbramiento digno, desde el punto de vista lógico, a los números naturales. Particularmente Frege a través de la lógica y Peano desde el punto de vista de la axiomática. Frege introduce el concepto de ancestralidad o ascendencia a fin de dar cabida a los números naturales, dentro de un sistema puramente lógico. De este sistema deriva las características que son propias de los números naturales como es el hecho de ser un conjunto inductivo y bien ordenado.

El enfoque de Peano es más axiomático a la manera de Euclides. Partiendo de elementos primitivos como: *uno, número y sucesor,* introduce los siguientes axiomas:
1) Uno es un número.
2) Uno no es el sucesor de ningún número.
3) El sucesor de un número es otro número.
4) Dos números no tienen el mismo sucesor.
5) *Principio de inducción*. Si una propiedad pertenece al número uno y al sucesor de un número que tiene esta misma propiedad, entonces, esta propiedad pertenece a todos los números naturales.
Basado en estos axiomas, Peano deriva las propiedades características de los números naturales.

---
[5] PAREJA-HEREDIA, D. *Opus cit*. pág. 11
[6] PAREJA-HEREDIA, D. *Opus cit*. Ver el tema "Último Teorema de Fermat" en la página 67

Frege definió primero, el concepto general "*x* es un ancestro de *y en la serie R*". Esta relación la llama "la relación ancestral *R*". Intuitivamente podemos captar la idea si dijéramos que: "*x* es el padre de *y*", por ejemplo: "*a* es el padre de *b*", "*b* es el padre de *c*", "*c* es el padre *d*" y "*d* es el padre de *e*", entonces la definición de Frege de "*x* es un ancestro de *y*, en la serie de paternidad" asegura que *a* es un ancestro de *b, c, d, y e; b* es un ancestro de *c, d y e; c* es un ancestro de *d* y *e*; y *d* es un ancestro de *e.* [7]

Más generalmente, si se da una serie de hechos de la forma *aRb*, *bRc*, *cRd* y así sucesivamente, Frege mostró cómo definir la relación *x es un ancestro de y en la serie R*, o también *x precede a y*, ó, *y* sigue a *x*, en la serie *R*. Después de hacer clara la relación de precedencia, Frege define:

1 – Cero es el número cardinal del concepto: "no ser idéntico a si mismo". Esto es equivalente a nuestra definición actual de cero como el cardinal del conjunto vacío, pues para Frege el conjunto vacío es $\{x: x \neq x\}$.

2 – *x es un número natural,* si, ó, $x = 0$, ó, 0 es un predecesor de *x* en la serie de predecesores.

En lenguaje moderno del análisis matemático, lo que Frege buscaba era caracterizar a los números naturales como un conjunto dotado de un orden lineal estricto, en donde cada subconjunto no vacío de naturales tuviera un primer elemento. Miremos más en detalle estas relaciones de orden[8].

DEFINICION. Una relación *R* es ***antisimétrica*** sobre un conjunto X si $x\,R\,y$, y, $y\,R\,x$, implica que $x = y$. Un ejemplo común es la relación "$\subseteq$" entre conjuntos. Si dos conjuntos **A** y **B,** satisfacen $\mathbf{A} \subseteq \mathbf{B}$ y $\mathbf{B} \subseteq \mathbf{A}$ se sigue que $\mathbf{A} = \mathbf{B}$.

*DEFINICION***.** Una relación "$\prec$" se dice que induce ***un orden parcial*** en un conjunto X (o que ordena parcialmente al conjunto X), si esta relación es transitiva y antisimétrica. Por ejemplo la relación $\leq$ es un orden parcial en los números naturales. En efecto, si $x \leq y$, y además $y \leq x$, se sigue que, $x = y$. También si $x \leq y$, y, $y \leq z$ entonces $x \leq z$. En base a lo anterior decimos que "$\leq$", ordena parcialmente a **N.** No es difícil verificar que la relación "$\subseteq$" es un orden parcial para $\wp(X)$, las partes de X o los subconjuntos formados con los elementos de X. En este caso decimos que $\wp(X)$ es un conjunto parcialmente ordenado, o que, $\wp(X)$ es un *poset* (en inglés "partial ordered set") con respecto a "$\subseteq$".

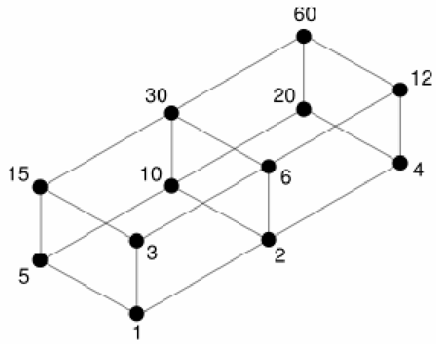


Fig. 2.5.1. Diagrama de Helmut Hasse, que muestra todos los divisores de 60, parcialmente ordenados según divisibilidad. Aquí el conjunto $\{1,2,3,4.5,6,10,12,15,20,30,60\}$ está ordenado parcialmente por la relación divisibilidad, "$\downarrow$". Note que, no todos los elementos son comparables. Por ejemplo, 4 y 15 no lo son, porque están en cadenas distintas, 4 en la cadena $\{1,2,4,12,60\}$ y 15 en la cadena $\{1,5,15,30,60\}$.

---

[7] Visitar: http://plato.stanford.edu/entries/frege/

[8] Ver por ejemplo: ROYDEN, H. L. *Real Analysis.* Second Edition. The Macmillan Company. London. 1968, Pág. 23.

DEFINICION. Un orden parcial "$\prec$" en un conjunto X es ***un orden lineal*** para X, si dados dos elementos *x,* y, *y* en X tenemos o, "$x \prec y$", o, "$y \prec x$"; Con esto estamos afirmando que todos los elementos de X son comparables. Verbigracia, "$\leq$" es un orden lineal para ***N***, mientras que "$\subseteq$" no lo es para $\wp(X)$, porque, no todos los elementos de partes de X son comparables. Igual ocurre con la relación divisibilidad "$\downarrow$" en el Diagrama de Hasse mostrado en la figura 2.5.1, donde no todos los elementos son comparables.

Cuando "$\prec$" es un orden parcial en X, y si $x \prec y$, decimos que *x* precede a *y* o que *y* sigue a *x*. o tratándose de números decimos que *x* es menor que *y* o que *y* es mayor que *x*. Esta parte fue la que Frege quiso dejar en claro con respecto a los naturales.

Si E$\subset$X, decimos que un elemento ***a*** de E es ***el primer elemento o elemento mínimo*** de E si, siempre que $x \in$E y $x \neq a$, tenemos que $\boldsymbol{a} \prec x$. Similarmente se puede definir el último o el máximo elemento de un conjunto E.

Un elemento $a \in$E se llama un ***elemento minimal*** de E si no existe $x \in$E, $x \neq a$ y $x \prec a$. En forma análoga se puede definir ***elementos maximales***. Puede notarse que si un conjunto tiene un elemento mínimo, entonces ese elemento es también elemento minimal. Cuando $\prec$ es un orden lineal, un elemento minimal es un elemento mínimo, pero en general es posible tener elementos minimales que no son elementos mínimos.

La definición de orden parcial no hace alusión a la posibilidad de $x \prec x$. Cuando este es el caso la relación se denomina un orden parcial reflexivo, en otro caso se dirá que el orden parcial es estricto. Así por ejemplo < es un orden parcial estricto en **N** y $\leq$ es un orden reflexivo en **N**. Frege quería llegar a que los naturales se pudieran caracterizar por la siguiente propiedad conocida como *principio de buena ordenación.*

DEFINICIÓN. Un orden lineal estricto $\prec$ en un conjunto X, se llama ***un buen orden*** para X si todo subconjunto no vacío de X contiene un primer elemento.

Las definiciones anteriores nos permiten llegar al resultado que Frege esperaba para los números naturales:

Principio de buena ordenación. Todo subconjunto no vacío de números naturales tiene un elemento mínimo. Esto significa que la relación "< "es un buen orden para **N**, por ser orden lineal estricto y porque si E$\subseteq$**N**, existe $a \in$E, tal que si $x \in$E, $x \neq a$, se cumple que $a < x$.

Giuseppe Peano (1858-1932). Además de sus aportes a la axiomatización de los números naturales, contribuyó al estudio de las ecuaciones diferenciales y a la búsqueda de un lenguaje formal para las matemáticas.

2.6 Los Primeros intentos de Axiomatizar la Aritmética de los Números Reales.

Como vimos arriba la axiomatización de la teoría de los números naturales la desarrolló Peano en su obra *Formulaire de Mathematiques* (Turín, 1895-1908). Ver el libro de Tarski[9], para mayores detalles. Sin embargo los primeros intentos de axiomatizar la aritmética de la totalidad de los números reales la realizó David Hilbert alrededor de 1900, después de haber publicado su famosa obra *Fundamentos de Geometría* (1899). Hoy la aritmética de **R** queda inmersa en la teoría axiomatizada de **R** como cuerpo ordenado con el *Axioma de Completitud*, que garantiza que todo conjunto S de reales acotado superiormente tiene una mínima cota superior o un extremo superior. Una exposición de estos axiomas puede verse en el Análisis de Royden citado antes.

En la entrega del *Monthly* de Enero 2008,[10] aparece una nota complementaria a una de las axiomatizaciones de la aritmética de los reales propuesta por Tarski en el libro citado arriba. Este artículo recuerda esta axiomatización, que por su carácter histórico y por su relación con el tema que nos ocupa me permito parafrasear a continuación. Tarski acepta que el Axioma 1 puede derivarse de los otros y es precisamente ese, el objetivo de la autora al publicar su artículo.

Tarski considera dos sistemas axiomáticos para la aritmética de los números reales. Aquí exponemos el más simple de los dos con sólo nueve axiomas y con términos primitivos "N", "<", "+" y "1". N es un conjunto de números, los que suponemos son los números reales (no necesariamente los números naturales). Los elementos $x, y, z, t,$ se suponen números en N.

Axioma 1. Si $x \neq y$, entonces $x < y$, ó, $y < x$. Los números siempre son comparables en la relación "<".
Axioma 2. Si $x < y$, entonces "no ($y < x$)". La relación es no simétrica.
Axioma 3. Si $x < z$, entonces existe un número y tal que: $x < y$, y, $y < z$. Axioma de densidad. Siempre entre dos números hay un tercero.
Axioma 4. Si K y L son dos conjuntos de números, digamos, $K \subset N$, y, $L \subset N$, que satisfacen la condición de que para cada x en K y cualquier y en L, se tiene que $x < y$, entonces existe un número z en N tal que, si $x \neq z$, y, $y \neq z$, entonces $x < z$, y, $z < y$. Axioma de separación. Este axioma tiene similitud con el axioma del extremo superior y con las cortaduras de Dedekind.
Axioma 5. $x + (y + z) = (x + z) + y$.
Axioma 6. Para cada par de números x, y, y, existe un número z tal que $x = y + z$. Posibilidad de substracción.
Axioma 7. Si $x + z < y + t$, entonces, $x < y$, ó, $z < t$.
Axioma 8. $1 \in N$.
Axioma 9. $1 < 1 + 1$.

El axioma 5 no es exactamente la propiedad asociativa, por tener los sumandos un orden cambiado. Sin embargo con los axiomas aquí expuestos se puede probar como teoremas las propiedades asociativa y conmutativa de la adición de números reales. Igualmente se derivan la unicidad del elemento unitario y del inverso aditivo. Todas estas propiedades aparecen como teoremas en el artículo aludido.

Siguiente Sección: D*edekind y los Números Reales*

---

[9] TARSKI, A. *Introduction to Logic and to the Methodology of Deductive Sciences*. Dover. New York. 1995. Nota pie de Página 120. Esta obra fue publicada inicialmente en 1941 por Oxford University Press, New York.
[10] UCSNAY, S. *A Note on Tarski´s Note.* The American Mathematical Monthly. Vol. 115, No. 1. January 2008.