En el "Ángulo de Devlin"

La Columna de Keith Devlin en la MAA.

Traducida y anotada por Diego Pareja Heredia. ***Universidad del Quindío.***

Enero de 2009

¿Habrá otro modo de iniciar la enseñanza de las matemáticas, que no sea contando?[1]

"Two roads diverged in a yellow wood,
And sorry I could not travel both,
And be one traveler, long I stood,
And looked down one as far as I could,
To where it bent in the undergrowth

Then took the other, as just as fair,
And having perhaps the better claim,
Because it was grassy and wanted wear;
Though as for that, the passing there,
Had worn them really about the same

And both that morning equally lay,
In leaves no step had trodden black,
Oh, I kept the first for another day!
Yet knowing how way leads on to way,
I doubted if I should ever come back.

I shall be telling this with a sigh,
Somewhere ages and ages hence:
Two roads diverged in a wood, and I –
I took the one less traveled by,
And that has made all the difference."

"Dos rutas divergen en bosque amarillento,
Y yo siento no poder a ambas recorrer,
Y ser un viajero, largo tiempo estuve,
Y miré abajo a uno tanto como pude,
Donde este se doblaba en la maleza

Así tomo el otro, como el justo y el correcto,
Y teniendo por supuesto la mejor elección,
Por estar enyerbado e invitaba al uso
Aunque para eso quien pasara allí,
Los habría gastado realmente por igual,

Y allí los dos esa mañana estaban,
Con hojas que ningún paso había pisado,
!Oh, yo mantuve al primero por otro día!
Aun sabiendo cómo una via conduce a una via,
Yo dudé si podría volver en un futuro.

Estaré diciéndolo quizá con un suspiro
En algún sitio edades y edades adelante:
Dos rutas divergían en un bosque y yo –
Y yo tomé la menos recorrida,
Y es eso lo que hizo la diferencia toda."

Robert Frost (1874–1963). *The Road not Taken.*

[1] Para leer la versión original en inglés ver: **http://www.maa.org/devlin/devlin_01_09.html**

Comencé mi pasada columna[2] con la famosa cita del matemático alemán Leopold Kronecker (1823-1891): "Dios hizo los enteros; todo lo demás es obra del hombre". Finalicé el ensayo con un número de cuestionamientos acerca de la forma en que enseñamos matemáticas a los principiantes y prometí decir algo sobre un enfoque alternativo al que se sigue en Estados Unidos.

Este mes la columna comienza donde la pasada termina. Para evitar repetir, asumiré que los lectores leyeron lo escrito allí. En particular, presento evidencia que soporta mi tesis (también sustentada previamente por otros colegas) que, mientras los números y quizá otros elementos de las matemáticas que se enseñan desde el preescolar al grado 8, son extraídas de la experiencia diaria, las partes más avanzadas se crean y aprenden al estilo de reglas pre-establecidas y a menudo iniciando con "juegos de símbolos" sin sentido predeterminado. Las primeras pueden aprenderse como consecuencia de una cadena de metáforas cognitivas asociadas al mundo real, de tal manera que al entendimiento de cada nuevo eslabón le encontramos explicación en algo que ya nos es familiar. Lo segundo, debe ser aprendido en forma parecida a cómo aprendemos a jugar ajedrez: primero siguiendo unas reglas con poca comprensión, luego con práctica, alcanzamos un nivel de juego donde emerge un significado y un entendimiento. (Lakoff y Núñez describen el primer proceso de enseñanza en su libro *¿De Dónde vienen las Matemáticas?*[3] La mayoría de nosotros, podemos evocar que fue así, cómo aprendimos cálculo – una observación que parece contradecir – y que pienso refuta la propuesta de Lakoff y Núñez de que el proceso de construcción de metáforas que ellos describen conducen a todas las matemáticas puras.)

Si en realidad existieran estas dos, esencialmente diferentes, clases de pensamiento matemático que deben ser (o al menos deberían ser mejor) aprendidas en diferentes formas, entonces una pregunta natural es, ¿dónde, en el currículo tradicional del preescolar a la universidad, el uno termina y el otro comienza? Y sin duda, las dos formas de aprender matemáticas de las que hablo son muy diferentes. En el primer caso, el significado da origen a las reglas; en el segundo, las reglas eventualmente conducen a un significado. En algún punto entre la adquisición del concepto de número (entero) y el cálculo infinitesimal, el proceso de aprender cambia de una abstracción a una creación lingüística.

Observe que ambos enfoques pueden generar matemáticas con significado en el mundo real. La diferencia es que en el primero, la conexión con el mundo real precede a las matemáticas nuevas, en el segundo, las nuevas matemáticas deben ser "atrapadas cognitivamente" antes de lograr conexiones entendibles y aplicaciones efectivas.

Antes de seguir quisiera anotar, ahora que estoy hablando de cognición, que mi clasificación simplista en dos categorías, es precisamente porque: una clasificación así, es conveniente como base para destacar los puntos generales a donde quiero ir. Como siempre, cuando hay gente de por medio, el mundo no será simplemente blanco y negro, si no un espectro continuo donde habrá entre los dos extremos variadas tonalidades de gris. Por las cartas que llegan a mi buzón, infiero que los matemáticos, como especie, parecen inclinados a verlo todo como binario. (¡Así era yo hasta que me encontré, primero como jefe de departamento, luego como decano, tratando a diario con gente y más aun con políticas universitarias!)

En particular, debe ser posible, en principio, para un estudiante con asesoría, aprender todas las matemáticas en el modo de metáforas iteradas descritas por Lakoff y Núñez, donde cada paso es una de dos: o entendimiento o competencias (de logros). Pero en la práctica debe tomar mucho tiempo usar este método para alcanzar la mayor parte de las matemáticas contemporáneas. Lo que hace posible aprender matemáticas avanzadas más o menos rápido es que el cerebro es capaz de aprender, siguiendo un conjunto de reglas dado, sin entenderlas previamente, y aplicarlas en un modo inteligente y útil. Con suficiente práctica, el cerebro eventualmente descubre (o crea) significado a lo que comenzó como un juego sin sentido, pero no es en general necesario alcanzar este estado para aplicar las

[2] Seguir el vínculo para leer la columna de Diciembre: **http://www.maa.org/devlin/devlin_12_08.html**.
[3] LAKOFF, G. NÚÑEZ, R. Where Mathematics Comes From: How the Embodied Mind Brings Mathematics into Being (Paperback). Basic Books. 2001

reglas apropiadamente. Un ejemplo obvio puede verse cada año, cuando los estudiantes universitarios de primer año de física e ingeniería aplican métodos avanzados de ecuaciones diferenciales, digamos, sin entenderlas – una hazaña que toma a los estudiante de matemáticas (donde el objetivo específico es entender) cuatro años de lucha para hacerlo.

Bajándonos del nivel universitario (donde el objetivo de lograr rápidamente competencias procedimentales es efectivo para estudiantes que necesitan usar varias técnicas matemáticas), ¿cuál es la mejor manera de enseñar matemáticas elementales a estudiantes en los primeros grados de escolaridad? Dada la habilidad de los niños de aprender juegos de computador, con frecuencia altamente sofisticados, y el alto nivel de destreza que ellos exhiben en sus videojuegos, muchos con un nivel de complejidad que desafían a la mayoría de los adultos – y si usted no me cree, haga el intento (yo tengo algunos muy difíciles de dominar) – apuesto a que es posible que ellos aprendan matemáticas de esta forma. Pero no estoy enterado que este enfoque haya sido utilizado, y no es claro para mi si el objetivo pueda lograrse. En efecto, creo que no. Una cosa que nos gustaría que nuestros niños aprendieran es cómo aplicar las matemáticas al mundo que los rodea en la experiencia diaria, y eso podría depender de las conexiones de las matemáticas con la realidad. Después de todo, un estudiante universitario que aprende a usar ecuaciones diferenciales en la modalidad “receta de cocina”, se aproxima al objetivo con más madurez de mente y con un montón increíble de conocimiento previo y experiencia en usar las matemáticas. En otras palabras, la efectividad de las competencias procedimentales basadas en reglas de rápido desempeño para niños mayores y adultos puede bien depender de un enlace inicial de su experiencia diaria, del que el estudiante aprendiz abstrae (digamos) los primeros conceptos básicos de número y de aritmética.

Así es, después de todo – hasta donde yo sé – cómo nuestros ancestros comenzaron la senda matemática hace muchos miles de años. Hice la salvedad en la frase precedente de que “hasta donde yo sé” porque, por supuesto, todo lo que sabemos se basa en evidencia arqueológica de artefactos que dejaron esas generaciones. No sabemos cómo efectivamente pensaban su mundo.

¿Cómo empezó todo?

Sabemos que nuestros ancestros empezaron el “conteo” con varias clases de artefactos (rayas en palos y huesos, ranuras en paredes de las cavernas, presumiblemente pilas de piedrecillas, etc.) al menos hace 35000 años, progresando hasta los más sofisticados tokens[4] de cerámica de los Sumerios de alrededor de 5000 años antes de Cristo y el surgimiento de los números abstractos (ya escritos con símbolos) de hace entre 7000 y 6000 años. Este desarrollo, que conduce primero a los números enteros positivos y a la suma y eventualmente a los racionales positivos, fue producto, pensamos, de la presión del comercio, la necesidad o el deseo de la gente de mantener un archivo de sus pertenencias y de las transacciones entre ellos.

De la evidencia arqueológica es claro que los primeros precursores de las matemáticas desarrollaron sistemas de medidas, tanto de longitud como de área, a fin de medir terrenos, plantar sembrados y eventualmente diseñar y construir edificios. Desde la perspectiva actual, esto aparece extraño como origen del sistema de los números reales, aunque exactamente cuándo, esta actividad se volvió numérica en extenso, no lo tenemos claro aun.

Hoy el currículo de matemáticas en USA comienza con los números enteros positivos y la adición, para seguir en forma más o menos lineal, con los enteros negativos y los números racionales, hasta culminar con el sistema de los números reales. Este enfoque puede sugerir, o aun hacer creer que los números naturales son en cierta forma más básicos o “naturales” que los reales. Pero no es esa la forma en que se dieron históricamente las cosas. En verdad, si usted trata de construir los reales, empezando con los naturales, estará

[4] Fichas u objetos creados con una finalidad especifica, particularmente en tiempos de Sumeria.

enfrentado a un largo y complicado proceso que les tomó a los matemáticos más de dos mil años de esfuerzo para lograrlo, completando esta tarea tan recientemente como al final del siglo XIX. Pero eso no significa que los números reales son cognitivamente más difíciles de entender como concepto que los números naturales, o que un sistema soporta cognitivamente al otro. Los humanos, no sólo tienen la habilidad natural de abstraer el conteo discreto de números directamente de su diaria experiencia (tamaños de colecciones de objetos discretos), si no también un sentido natural de apreciación de cantidades continuas tales como longitudes y volúmenes (área parece menos natural). La abstracción en ese dominio conduce a los números reales positivos.

En otras palabras, desde el punto de vista cognitivo (opuesto al matemático), los números naturales ni son más fundamentales ni más naturales que los números reales, Ambos conjuntos aparecen directamente de nuestra experiencia frente al mundo real. Más aun, ellos aparecen paralelamente originados en distintos procesos cognitivos, usados con diferentes propósitos, independientemente uno del otro.

En efecto, evidencia menor, originada en la investigación actual del cerebro sugiere que desde el punto de vista neurofisiológico, los números reales – nuestro sentido del continuo real – es más básico que los números naturales, lo que parece ser construido sobre el sentido del continuo numérico por medio de nuestra capacidad lingüística. (Para detalles ver los libros y artículos recientes de los investigadores Stanislaw Dehaene o Brian Butterworth).

Parece entonces que, cuando guiamos nuestros niños en los primeros pasos del largo camino hacia el pensamiento matemático, asumiendo que queremos fundamentar estos primeros pasos cruciales en las experiencias diarias y construir sobre capacidades humanas cognitivas naturales, tenemos dos posibles formas de empezar: el mundo discreto de valorar los tamaños de las colecciones y el mundo continuo de valoración de las longitudes y los volúmenes. Lo primero conduce a los naturales y al conteo, lo segundo a los números reales y a la medición.

Dos rutas que divergen en la espesura educativa.

Si empezamos con la medición, los números de contar y los números racionales positivos aparecen como puntos específicos en la recta continua de los números reales. Comenzando con el conteo de números naturales, los números reales aparecen en el proceso de llenar las lagunas en la recta de los números racionales. (En ambos casos usted tendría que maniobrar números negativos en la mejor forma posible). Ninguno de los enfoques parece ofrecer ventajas considerables sobre el otro desde la perspectiva del aprendizaje. Escoja una alternativa y aprenda a lidiar con las consecuencias del respectivo currículo. (Cierto; es matemáticamente más difícil construir los números reales a partir de los números naturales, que reconocer los números naturales y los racionales como puntos especiales en la recta real, pero la cuestión aquí no es la de la construcción matemática formal, si no la cognición humana construyéndose en la experiencia diaria).

En los Estados Unidos y en muchos otros países, la escogencia se hizo – quizás irreflexivamente – hace bastante tiempo al tomar como base nuestra facilidad de contar como punto de partida, y así empezar la jornada matemática con los números naturales. Pero ha habido al menos un serio intento de construir un currículo matemático usando el otro enfoque, y este será el foco de lo que resta de este ensayo. No porque yo piense que un enfoque sea mejor que el otro – aunque este sea el caso – si no porque, no importa cual enfoque se adopte, pienso que es más probable desempeñar mejor papel y entender mejor lo que estamos logrando como maestros, si somos conscientes del enfoque específico.

Ciertamente, conocer de otro enfoque puede ayudarnos a guiar nuestros estudiantes particularmente a través de áreas enredadas tales como las que involucran el concepto de multiplicación, tópico este, al que dediqué algunas de mis columnas previas. Como Piaget observó, y otros han escrito en extenso, ayudar a los estudiantes a entender bien la multiplicación en el currículo con el enfoque del conteo es extremadamente difícil. En el otro enfoque empezando con la medición, en contraste, algunas de las más espinosas sutilezas de la multiplicación que plagan el otro currículo, simplemente no aparecen. ¿Podrá ser que la forma de echar para delante con éxito la educación matemática temprana sea adoptar un enfoque híbrido que se construya simultáneamente sobre la base de las dos intuiciones humanas en este aspecto? (Se puede sostener que esto ocurre en cierto aspecto. En USA, los niños en el sistema de currículo orientado por el conteo, usa longitudes, volúmenes, y otras medidas dadas en números reales en su vida diaria, y niños en el currículo de números reales, que me propongo describir en seguida, pueden contar y posiblemente sumar y restar números naturales, antes de ir a la escuela. Pero no estoy enterado de una escuela donde formalmente en el currículo se trate de combinar los dos enfoques.)

Independientemente de cual de los dos enfoques se adopte, la meta primaria explícita de la educación matemática corriente entre K-12[5] es la misma en todo el mundo: formar los ciudadanos del futuro con un entendimiento y fluencia procedimental en el sistema de los números reales. En la escuelas de USA, esto se hace progresivamente, con los primeros escenarios (números naturales, enteros. racionales) enseñados bajo el nombre de “aritmética” mientras que los números reales se enseñan en los cursos rotulados como “álgebra”. (Hasta muy recientemente, geometría y trigonometría formaban parte del currículo escolar típico, trayendo elementos del enfoque medicional al salón de clase, pero fue abandonado, como todos saben, aunque no sin lucha por parte de los que defienden su inclusión.)

Es interesante notar que el cubrimiento del tema de los números reales como “álgebra” en el currículo de USA asegura un tratamiento procedimental completo, evitando las enormes dificultades involucradas en la construcción del concepto de número real empezando con los racionales. Eventualmente, el enfoque del conteo tiene que apoyarse en nuestras intuiciones de la experiencia diaria con medidas continuas, aunque él no comience con ellas.

Volver a la URSS

Y así volver al que, según estoy informado, fue el primer intento de construir un currículo contemporáneo completo, empezando, no con el conteo si no con la medición. Este se desarrolló en la antigua Unión Soviética durante la segunda mitad del siglo veinte, y su proponente líder fue el psicólogo y educador Vasily Davydov (1930-1988). Davydov basó su currículo – referido en nuestros días generalmente por su nombre, aunque otras personas también estuvieron involucradas en el proceso, destacándose entre ellas B. Elkonin – en las teorías cognitivas del gran psicólogo del desarrollo ruso, Lev Semenovich Vygotsky (1896-1934).

En una serie de estudios del desarrollo de primates, niños, y gente tradicional, Vygotsky observó que el desarrollo cognitivo ocurre cuando aparece un problema para el cual los métodos de solución previos no funcionan (Vygotsky & Luria, 1993). El currículo matemático de Davydov se construye basado en ésta observación, y consiste en una serie de problemas cuidadosamente seriados que requieren progresivamente enfoques y métodos cada vez más poderosos para su solución. Esto es desde luego muy diferente al enfoque instruccional adoptado por la mayoría de los maestros de USA, que consiste en una lección, seguida por ejemplos elaborados, y continuando con un conjunto de ejercicios de práctica a fin de crear una destreza o habilidad particular que el instructor ha mostrado en clase.

Pero ésta es justamente la primera de varias diferencias de los dos enfoques. Aunque el currículo matemático K-12 de USA tiene como fin la asimilación del sistema de los números reales en su parte conceptual y operativa, los primeros años de instrucción se emplean en los números naturales, enteros y fraccionarios en sus modalidades positivas y negativas, relegando a los últimos grados el tratamiento de los números reales, bajo el nombre de “álgebra”. En contraste, el currículo de Davydov centra su enfoque en el sistema de los

[5] Así se conoce en Estados Unidos la educación básica del Kínder (Preescolar) hasta el grado 12.

números reales desde el principio. Davydov cree que comenzar con números específicos (naturales por ejemplo) crea dificultades posteriores cuando los estudiantes tratan con números racionales o reales, y aun para el desarrollo del álgebra.

Volveré al enfoque del sistema de los números reales dentro de un momento, pero primero necesito introducir otras características propias de la concepción creada por Davydov.

Davydov toma en cuenta la distinción que hace Vygotsky entre lo que él llama conceptos espontáneos y conceptos científicos. Los primeros aparecen cuando los niños abstraen propiedades de la experiencia diaria o de instancias específicas; los segundos nacen de experiencias formales con las propiedades mismas. Esta distinción es más o menos (pero no enteramente) la misma que aquella que discutí en mi pasada columna entre las matemáticas que aprendemos por abstracción de la realidad y las matemáticas que aprendemos basados en el modo del seguimiento de reglas como ocurre cuando aprendemos a jugar ajedrez. Por ejemplo, los niños que aprenden los números enteros positivos contando colecciones de objetos, adquieren como consecuencia un concepto espontáneo. Aprender a jugar ajedrez lleva a un entendimiento "científico" del juego. Lo que puntualicé antes fue que en mi experiencia, tanto como estudiante y como profesor de matemáticas avanzadas, el enfoque científico es el más eficiente, y tal vez el único, para aprender tópicos altamente abstractos como los involucrados en el cálculo infinitesimal.

En la columna del mes pasado yo pregunté: ¿dónde, el tipo de matemáticas abstraídas de la realidad (conceptos matemáticos espontáneos) termina y donde se inicia la clase de matemáticas derivadas del modo "aprender-por- reglas" (concepción científica)? Como lo he anotado, esta pregunta inocente la oscurece el hecho de que posiblemente sea un espectro continuo de cambios en lugar de ser a saltos. Una pregunta más útil, parafraseada en la perspectiva educacional es: ¿qué parte o partes de las matemáticas deberíamos enseñar con el enfoque de conceptos espontáneos y cuales con el otro enfoque de los conceptos científicos?

El consenso en USA es que el enfoque espontáneo es la forma de ir al menos de K al Octavo grado y de pronto hasta el grado 12. (Adoptar el enfoque espontáneo de K a 12 tiende a forzar una presentación del cálculo como si se tratara de "un método para calcular pendientes" solamente, el que no comparto porque reduce uno de los grandes logros del intelecto humano a un recetario de trucos. Esto da tema para otra columna).

El currículo de Davydov adopta el enfoque del concepto científico desde el primer día. Davydov creyó que aprender matemáticas usando el enfoque científico de lo general a lo particular lleva a la larga a un mejor entendimiento y mejores resultados en matemáticas de lo que se logra con el enfoque de concepción espontánea. Su razonamiento se fundamenta en que los niños desde su infancia comienzan el aprendizaje de las matemáticas a través de la abstracción, que ellos estarán mejor preparados para usar las abstracciones formales en años escolares posteriores, y que su pensamiento se desarrollará de forma tal que podrán enriquecer sus capacidades para dominar matemáticas más avanzadas.

Davydov escribió en 1966, "No existe nada en las capacidades de un niño de escuela que impida la algebrización de las matemáticas elementales. En efecto, tal enfoque ayuda a despertar e incrementar las capacidades con las que vienen los niños para aprender las matemáticas."

Yo debería enfatizar que la adopción del enfoque "concepto-científico" no es para nada lo mismo que enseñar matemáticas de un modo axiomático abstracto. (Aquí es donde mi analogía con el aprendizaje del juego de ajedrez se rompe, como ocurre tarde o temprano con todas las analogías, no importa cuan útiles ellas puedan ser al principio; lo que me recuerda, ¿mencioné alguna vez los problemas que pueden resultar de introducir la multiplicación como una suma abreviada?)[6] El enfoque de Davydov está ligado firmemente a las experiencias del mundo real, y mucho. De veras, los estudiantes emplean más tiempo al comienzo haciendo nada distinto que actividades del mundo real (antes de hacer

[6] Ver las Columnas sobre este tema comenzando con: **http://www.maa.org/devlin/devlin_06_08.html**

matemáticas en concreto) contrariamente a lo que ocurre en el caso del currículo de USA. Pero cuando los conceptos de las matemáticas se introducen, se hace en la modalidad científica. Los estudiantes son capaces de ligar el concepto científico a su mundo de la experiencia real, no porque ese concepto aparezca espontáneamente de esa experiencia (realmente no lo hace) si no porque ellos han sido guiados a lo largo de experiencias lo suficientemente ricas, experiencias preparatorias que los capacitan para inmediatamente ver, cómo el concepto aplica al mundo real. (En términos de metáforas, la aplicación metafórica se reconstruye de lo nuevo hacia lo viejo, no al contrario como ocurre en el marco de aprendizaje sostenido por Lakoff y Núñez.)

Cómo la llanta rusa se adhiere a la vía

Así es como el currículo de Davydov comienza (1975a[7]). Empieza por guiar a los estudiantes a través de una serie creciente y sofisticada de ejercicios que desarrollan entendimiento no numérico, de tamaño (longitud, volumen, masa). El primer paso "pre-matemático" ayuda a preparar a los alumnos para esos ejercicios.

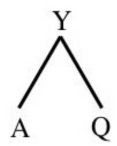
En el primer grado, se pregunta a los alumnos cómo describir y definir atributos físicos de los objetos que pueden ser comparados. Como sugerí hace un momento, la intención es ofrecer un contexto para que los niños exploren relaciones, tanto comparativas como de igualdad. Normalmente niños de seis años comparan físicamente longitudes, volúmenes, y masas de objetos, describen sus descubrimientos con enunciados como

$$H < B$$

Donde H y B son cantidades no especificadas, no objetos que se comparan. (En este escenario las cantidades no especificadas no son números.) Note que esto se enfoca en abstracciones. El contexto físico y el acto de grabar (anotar, registrar) significan que los elementos de "álgebra abstracta" han sido introducidos en forma significativa (con sentido), y no aparecen para los niños como algo abstracto.

Por ejemplo, a los estudiantes se les pregunta cómo igualar cantidades desiguales o cómo convertir cantidades iguales en desiguales adicionando o sustrayendo cierta cantidad. Comenzando con una situación en cuanto a volumen registrada como H<B, los niños pueden lograr la igualdad, adicionando al volumen H o quitando al volumen B. Ellos observarán que cualquiera de las acciones, adicionar o sustraer la misma cantidad dará el mismo efecto. A ellos se les dice que ésta, es la diferencia.

Sólo después que han asimilado apropiadamente los conceptos pre-numéricos de tamaño y de relaciones de "parte a todo" se los enfrenta a tareas que requieren cuantificación. Por ejemplo, si ellos vienen trabajando con masa y han notado que la masa Y es el todo y las masas A y Q son las partes que conforman el todo, pueden ser invitados a expresar esta relación por medio de un diagrama de V-invertida como éste:



Relación que ellos podrían escribir de manera más formal como:

$$Y = A + Q, \; Q + A = Y, \; Y - Q = A, \; Y - A = Q$$

[7] Corresponde a la bibliografía al final del artículo

Esto conforma el escenario para poner valores numéricos a las “variables” a fin de resolver ecuaciones que surgen de problemas del mundo real. (Números, esto es, números reales, se introducen en la segunda parte del primer grado, como medidas abstractas de longitud, de volumen, de masa y similares.) Como resultado, los estudiantes no tienen que aprender reglas para resolver ecuaciones algebraicas; en su lugar lograrán ambientarse en razonamientos que conducen a relaciones de partes-todo.

Cuando los alumnos acceden a la multiplicación y a la división, el currículo de Davydov requiere que ellos las asocien con su conocimiento previo de medición y de valor posicional, como también adición y sustracción, y aplicarlas a problemas relacionados con el sistema métrico, con sistemas numéricos en otras bases (estudiados en el primer grado), áreas y perímetros y a la solución de más complejas ecuaciones. En otras palabras, las nuevas operaciones vienen ligadas simultáneamente al mundo real y a sus conexiones con lo previamente aprendido en matemáticas. Los alumnos deben explorar las dos nuevas operaciones y su interrelación sistémica con conceptos ya aprendidos. Constantemente estarán expuestos a problemas que requieren de parte de ellos la búsqueda de conexiones con conceptos ya aprendidos. Cada nuevo problema es diferente, en algún sentido importante, de sus predecesores y de sus sucesores. (Compare esto con el enfoque en USA donde los problemas se presentan en grupos; cada uno de ellos enfocado en un solo procedimiento.) Como resultado, los estudiantes deben continuamente pensar acerca de lo que están haciendo a fin de dar sentido a sus acciones. Al trabajar sobre muchos problemas diseñados para crear conexiones entre las nuevas acciones de multiplicar y dividir y su previo conocimiento de la suma y la resta, los sistemas posicionales y ecuaciones, ellos integran su conocimiento a un sistema conceptual más amplio.

Así, el currículo de Davydov está aterrizado al mundo real, pero el punto de partida es el mundo continuo de la medición y no el mundo discreto del conteo. No sé para usted, pero la medición y el conteo ambos me parecen que ofrecen puntos concretos para empezar la jornada matemática en educación. Todos los humanos nacen con la capacidad para emitir tanto juicios y razones acerca de longitud, área, volumen, etc., como también con la capacidad para comparar tamaños de colecciones. Cada capacidad conduce directamente al concepto de número: una a los números reales y la otra a los números naturales.

¿Cuál es el mejor?

Si el aprendizaje se basa en la adquisición de conceptos espontáneos, comenzando con el conteo, la secuencia familiar empezando con los números naturales hacia los racionales surge automáticamente. Pero el paso a los números reales es difícil en este contexto, tanto matemáticamente (no fue sino hasta el siglo XIX que los matemáticos dieron forma definitivamente a ellos) como cognitivamente (“llenar los vacíos en la recta racional” es duro de tragar, cuando la recta racional parece no tener huecos – ya que los racionales son “densos”, como dicen los matemáticos.) Con la geometría (y la trigonometría) ya no en boga, el currículo de USA, limpiamente evita el tema de los números reales (sabiamente en mi opinión) y dirigiendo su mirada cautelosa al punto dónde puede ubicar el tema en el seno del álgebra, donde el foco está en la parte procedimental y no en el aspecto conceptual. (Los números complejos aun permanecen problemáticos, y en efecto lo son, su introducción se posterga hasta el primer año de universidad, como concepto científico (que realmente lo es), motivado por la demanda procedimental.)

Claramente el enfoque de Davydov no tiene esas dificultades. Teniendo el sistema de los números reales como básico, los enteros y los racionales son sólo puntos particulares en la recta numérica real.

Otra ventaja posible del enfoque de Davydov es que los problemas más complejos acerca de la introducción exitosa de la multiplicación y la división que complica el enfoque de iniciar con el conteo, ya no aparece. Esto fue el tema de tres de mis pasadas columnas el año pasado. Y no aparece, puesto que multiplicación y división son conceptos naturales en el mundo de las longitudes, volúmenes, masas, etc., y de las relaciones inherentes al concepto de parte-todo que liga a estos conceptos.

Otra característica del enfoque de Davydov que personalmente (digo, recuerden, como matemático, no como profesor o un experto en educación matemática, lo cual no soy) encuentro preocupante es la ausencia de paquetes de ejercicios enfocados a crear destrezas específicas en el alumno. Parcelación y adquisición de fluencia procedimental son requisitos cruciales para progresar en matemáticas, y no sé de otra forma de conseguirlos que no sea a través de la práctica repetitiva. Mientras que un currículo matemático que consista sólo de ejercicios repetitivos, producirá seguramente más estudiantes fuera de las matemáticas, que gente entrenada en el manejo de los números (la ausencia de ambos me parece igual de problemática). Un colega de educación matemática me dice que los profesores rusos algunas veces (¿a menudo?) permiten que sus estudiantes trabajen en grupos de ejercicios del mismo tema y me sorprendería si el éxito con un currículo de Davydov más estricto dependería al menos en parte del trabajo de los padres de familia en ejercicios repetitivos en la casa.

Si un enfoque es, por si mismo, inherentemente mejor que el otro, sin embargo, lo desconozco. Evidencia aislada al respecto, nadie la conoce. Desafortunadamente – y esta es una palabra suave, dados los enormes intereses que se juegan en el negocio de la educación matemática hoy en día en el mundo – no ha habido suficientes estudios comparativos para dejar el asunto establecido definitivamente.

Uno de los pocos estudios hechos en USA que conozco que involucra implementación de los primeros tres años del currículo elemental de Davydov se realizó en una escuela de Nueva York. El estudio fue conducido por Jean Schmittau de la Universidad Estatal de Nueva York en Binghamton. Schmittau (2004, p. 20) reporta que “los niños del estudio encontraron una necesidad continua en el resolver problemas de dificultad considerable – aun ingente – que requieren virtualmente un año para enfrentarlos, a medida que ellos gradualmente desarrollan la habilidad para mantener la concentración y el intenso enfoque necesario para tener éxito. Sin embargo, al completar el currículo, fueron capaces de resolver problemas que normalmente se proponen solamente a estudiantes de secundaria”

Las afirmaciones comunes que se hacen en esta era de las calculadoras baratas, el computador y el celular, en el sentido de que ya no hace falta que los niños aprendan a calcular, y que el tiempo gastado en eso limita el tiempo del aprendizaje matemático conceptual (por ejemplo, usted encuentra estas afirmaciones repetidamente en el Yearbook 1998 de la NCTM) las contradice Schmittau (2004, p. 40), “A la luz de los resultados presentado [en su artículo], es imposible sostener que la conceptualización y la habilidad para resolver problemas difíciles, quedan comprometidas al aprender a calcular. No sólo los niños que usan el currículo de Davydov logran altos niveles de competencia procedimental y entendimiento matemático, ellos también fueron capaces de analizar y resolver problemas que típicamente son difíciles para estudiantes de bachillerato en USA. Ellos no usaron calculadoras, y resolvieron cada error computacional, conceptualmente sin apegarse a una “regla”. Además, el desarrollo de habilidades computacionales exigió de ellos tanto el pensamiento matemático como el establecimiento de nuevas conexiones – condición sine qua non – de un aprendizaje con sentido”

Aquí de nuevo, me encuentro preocupado por el balance entre, de un lado, entendimiento conceptual profundo y habilidad de razonar con base a principios primarios – altas facetas del quehacer matemático – y de otro lado, la necesidad de métodos basados en reglas y algoritmos que se practican hasta el punto de lograr una fluencia mecánica a fin de progresar más allá del tema. La popularidad continuada – entre padres así como con los niños – de clases sabatinas de entrenamiento en técnicas matemáticas, ofrecidas comercialmente, sugiere que no estoy solo en la valoración de la adquisición de habilidades básicas (fluencia procedimental), y como mencioné ya, me halagaría si el éxito de algunos experimentos curriculares no dependieran en parte de actividades no reportadas fuera del salón de clase.

Otro estudio se adelantó al mismo tiempo en dos escuelas de Hawai por Bárbara Dougherty y Ana Slovin de la Universidad de Hawai. Allí también los investigadores reportaron resultados exitosos. Ellas escribieron (2004, p. 301), "Los métodos de solución desarrollados por los estudiante sugiere que los niños jóvenes son capaces de usar símbolos algebraicos y diagramas generalizados para resolver problemas. Los diagramas y símbolos asociados pueden representar la estructura de una situación matemática y pueden aplicarse en gran variedad de escenarios." (Los estudiantes usan símbolos algebraicos emparejados con representaciones diagramáticas como las de la V invertida mostrada antes. Los niños a los que se refiere el estudio son de grado 3.)

¿Cuál es la salsa secreta?

Los anteriores estudios son alentadores. Pero igual que todos los estudios educacionales, exigen mucha cautela al interpretarlos, especialmente si su objetivo es establecer políticas y currícula. (Este no fue el objetivo de los dos estudios justamente citados). Una cuestión es que los estudios de ensayo de currícula – o "currícula no estándar" que se prueban – a menudo producen buenos resultados, por la simple razón de que son desarrollados y practicados por profesores entusiastas y bien entrenados, con profundo entendimiento de los materiales y de la práctica educativa. Como resultado, lo que se esta midiendo es más la calidad de la enseñanza, que el currículo en cuestión. De otra parte, las comparaciones de los niveles de aceptación logrados en los currícula nacionales tampoco son conclusivos. Por ejemplo, estudiantes de Singapur lograron resultados más altos que los obtenidos por estudiantes rusos en el TIMSS[8], y la instrucción matemática en Singapur se basa en el currículo de conteo, mientras que en Rusia el enfoque en general no es sólo el liderado por Davydov, así que exactamente ¿qué es comparado con qué? Aun si el enfoque de Davydov es en esencia superior en algún sentido – al tomarse como un todo – yo pienso que, él bien podría serlo (en parte significativa debido a la forma estructurada, integrada y exploratoria en que el material fue introducido). Los logros altamente consistentes de los estudiantes de Singapur y Japón sugieren que un enfoque basado en el conteo puede funcionar bien si es enseñado bien. (Note que los currícula de Japón y Singapur también son construidos dentro de un enfoque altamente estructurado que enfatiza el entendimiento de la proporcionalidad, lo cual es algo que el enfoque de Davydov también desarrolla, aunque en forma diferente.)

En efecto, siguiendo la última observación un poco más, encontramos lo que yo sospecho es el factor realmente importante aquí: los profesores que tienen una comprensión profunda de las matemáticas básicas. Hmmm, ¿Dónde he oído (o leído) esto antes? ¿Living Ma, alguien más?

En el contexto de USA, malogrado por las incesantes guerras matemáticas y por la intensa politización de la educación matemática que las genera, mi visión es que el debate en torno al currículo y la teoría de la educación que lo origina es un distractivo que deberíamos evitar (al menos por ahora). Para mí, el asunto real que nos enfrenta, es rotundamente uno, y muy simple: ***La educación de los profesores***.[9] No importa, qué currículo, e independientemente de la teoría sicológica o educativa en la que se fundamente, la enseñanza va dirigida a seres humanos interactuando con un número de (usualmente) jóvenes, también seres humanos. Si ese maestro, no ama lo que enseña, y tampoco lo entiende honda y profundamente, los resultados simplemente no van a llegar. ¿La solución? Atraer los más brillantes y mejores prospectos para la docencia futura, enseñarles bien, pagarles en forma proporcional al nivel de su entrenamiento profesional, a sus habilidades, a sus responsabilidades y más aun, ofrecerles oportunidades de desarrollo intelectual continuo en su ámbito profesional. Exactamente como hacemos (por ejemplo) con profesionales de la ingeniería o de la medicina. Así de simple.

[8] Sigla para Trends in International Mathematics and Science Study, test que ofrece información sobre el desempeño de estudiantes entre los grados 4o y 8o de USA comparados con los estudiantes de otros países.
[9] Énfasis del traductor

Fuentes

La fuente principal para los materiales primarios sobre el currículo de Davydov es:

L. P. Steffe, (Ed.), *Children's capacity for learning mathematics. Soviet Studies in the Psychology of Learning and Teaching Mathematics, Vol. VII*, Chicago: University of Chicago. Artículos específicos en ese volumen se listan adelante.

El breve sumario del enfoque de Davydov se basa esencialmente en Dougherty & Slovin 2004 y en Schmittau 2004.

El artículo de Dougherty & Slovin describe un proyecto de investigación y desarrollo con sede en Hawaii llamado *Measure Up* que utiliza el enfoque Davydov para introducir las matemáticas a través de la medición y el álgebra en los grados de 1 a 3.

References

Butterworth, B. (1999). *What Counts: How Every Brain is Hardwired for Math,* Free Press

Davydov, V.V. (1966). Logical and psychological problems of elementary mathematics as an academic subject. From D. B. Elkonin & V. V. Davydov (eds.), *Learning Capacity and Age Level: Primary Grades,* (pp. 54-103). Moscow: Prosveshchenie.

Davydov, V.V. (1975a). Logical and psychological problems of elementary mathematics as an academic subject. In L. P. Steffe, (Ed.), *Children's capacity for learning mathematics. Soviet Studies in the Psychology of Learning and Teaching Mathematics, Vol. VII* (pp.55-107). University of Chicago.

Davydov, V.V. (1975b). The psychological characteristics of the "prenumerical" period of mathematics instruction. In L. P. Steffe, (Ed.), *Children's capacity for learning mathematics. Soviet Studies in the Psychology of Learning and Teaching Mathematics, Vol. VII* (pp.109-205). University of Chicago.

Davydov, V. V., Gorbov, S., Mukulina, T., Savelyeva, M., & Tabachnikova, N. (1999). *Mathematics.* Moscow Press.

Dehaene, S. (1997). *The Number Sense: How the Mind Creates Mathematics,* Oxford University Press.

Devlin, K. (2000). *The Math Gene: How Mathematical Thinking Evolved And Why Numbers Are Like Gossip*, Basic Books.

Dougherty, B. & Slovin, H. Generalized diagrams as a tool for young children's problem solving. *Proceedings of the 28th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education, 2004, Vol. 2* (pp.295-302). PME: Capetown, South Africa.

Ma, Liping, (1999). *Knowing and Teaching Elementary Mathematics: Teachers' Understanding of Fundamental Mathematics in China and the United States,* Lawrence Erlbaum: Studies in Mathematical Thinking and Learning.

Morrow, L.J. & M.J. Kenney, M.J. (Eds.) (1998), *NCTM Yearbook: The teaching and learning of algorithms in school mathematics.* Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.

Schmittau, J. Vygotskian theory and mathematics education: Resolving the conceptual-procedural dichotomy. *European Journal of Psychology of Education, 2004, Vol. XIX, No 1* (pp.19-43). Instituto Superior de Psicologia Aplicada : Lisbon, Spain.

Vygotsky, L. (1978). *Mind in society: The development of higher psychological processes.* Harvard Press.