¿Qué es Entendimiento Conceptual? [1]

Agosto 2009

En el "Ángulo de Devlin"

La columna de Keith Devlin en la MAA.

Traducida y editada por Diego Pareja Heredia. ***Universidad del Quindío.***

Los educadores matemáticos hablan y hablan sobre entendimiento conceptual; de cuán importante es (o no es) para el aprendizaje efectivo de las matemáticas (dependiendo de lo que usted entienda por efectivo), y cómo encontrar la mejor manera de lograrlo en principiantes (si eso es lo que se quiere).

Entendimiento conceptual es uno de los cinco ejes que constituyen la suficiencia matemática, la meta central de las matemáticas del currículo K-12[2] como lo ha establecido el Comité de Estudio del Aprendizaje de las Matemáticas del Consejo Nacional de Investigación 1999-2000 en su reporte, *En Suma: Ayudando a los niños a aprender matemáticas*, publicado por la National Academy Press en 2001.

Soy fanático de este libro, y ya de entrada pienso que, lograr un entendimiento conceptual es una componente importante de la educación matemática. Esto parece enfrentarme a una parte de los contendores de las "guerras matemáticas" – la brigada de las rutinas –. Se complica la cosa, al poner de presente mi postura de que muchos conceptos matemáticos sólo se pueden entender cuando el aprendiz ha logrado agilidad en las rutinas procedimentales usando este concepto. En tales casos, el aprendizaje sólo puede ocurrir después de asimilar las reglas simbólicas, a veces mucho más tarde de lo que uno quisiera. Con esto probablemente me voy a enemistar con el otro bando de esta guerra – los proponentes de la prioridad del aprendizaje conceptual –.

---

[1] La columna aparece originalmente en: **http://www.maa.org/devlin/devlin_09_07.html**

[2] Así se denomina la educación básica en Estados Unidos

Estoy de acuerdo con prácticamente todo el mundo, en el sentido que, si las rutinas no están acompañadas por cierto entendimiento conceptual, estas se vuelven frágiles y evanescentes. Creo necesario la adquisición previa de destrezas rutinarias antes del logro de un entendimiento conceptual (a diferencia a como ocurre en las partes más avanzadas de las matemáticas (cálculo y más allá)) y no estoy convencido que haya otra alternativa posible para la mayoría de los cursos elementales.

[Dicho sea de paso: Pienso que es posible lograr entendimiento conceptual paralelamente con la destreza operativa de algún tópico matemático, pero podría tomar mucho tiempo lograr total entendimiento de éste, con resultados negativos en cuanto al cariño por la materia. Pero como creaturas hablantes – la "especie simbólica" en palabras de Terrence Deacon[3] – tenemos una potente habilidad para aprender a seguir reglas simbólicas sin entender su significado. Como reconocedores de patrones, con formidable instinto para percibir significado en el mundo, una vez hayamos aprendido las reglas de ese "juego simbólico", generalmente no nos toma mucho tiempo, darle significado. El juego de ajedrez es un ejemplo excelente de cómo el aprender por mero aprendizaje de las reglas, lleva a un entendimiento del juego. Así, aunque la idea de que los estudiantes deberían "entender antes que hacer" tiene suficiente atractivo, ignora el hecho que la naturaleza nos ha equipado con un método mucho más eficiente para aprender, que aquel del entendimiento conceptual.]

Pero éste no es mi objetivo aquí. En su lugar lo que me estoy preguntando es, ¿qué es exactamente entendimiento conceptual?

Desconozco que significan realmente los otros por este término; sospecho que a menudo ellos significan algo diferente a lo que yo entiendo (aunque creo que lo qué significo yo por esto, es lo que otros colegas también lo entienden); y no sé cómo decir si un estudiante realmente tiene lo que yo significo por conocimiento conceptual.

"En Suma" (*Adding it Up*), citado arriba, define entendimiento conceptual como "la comprensión de los conceptos matemáticos, operaciones y relaciones," pero esto sólo origina la pregunta inicial, realmente no le da una respuesta.

Sea lo que fuere ¿Cómo enseñarlo?

La sabiduría corriente nos dice que para introducir un concepto de modo que facilite su comprensión se debe empezar con varios ejemplos. Verbigracia, el reconocido matemático americano Ralph P. Boas, dijo al respecto, en su artículo *¿Podemos hacer las matemáticas inteligibles*?[4]:

"Suponga que usted desea enseñarle a un niño pequeño el concepto de *gato*. ¿Le dice usted al niño que un gato es un mamífero pequeño, esencialmente

[3] **Deacon, T. The Symbolic Species: *The Co-evolution of Language and the Brain.* W. W. Norton. 1997.**
[4] Publicado en el American Mathematical Monthly, Vol. 88 (1981), pp. 727-731.

carnívoro, con garras retráctiles, un sonido distintivo, etc., etc.? Le apuesto a que no. Usted probablemente le muestra un montón de gatos diferentes, diciendo cada vez, "*gatito*", hasta que el niño abstrae la idea. Para ponerla en forma amplia, las generalizaciones se logran de mejor manera a través de abstracciones de la experiencia."

Esta idea es llamativa, aunque no exenta de dificultades; la principal es que, el aprendiz puede terminar captando un concepto diferente al propuesto por el instructor. La dificultad aparece porque un concepto matemático abstracto generalmente tiene características fundamentales diferentes a aquellas que tienen algunos o todos los ejemplos que al aprendiz se le trae a colación. (¡Esto es, después de todo, uno de los objetivos de la abstracción!)

Una importante ilustración estudiada extensivamente, es la del aprendizaje del concepto matemático moderno de función. Por ejemplo, el matemático israelí Uri Leron, en su artículo "Pensamiento matemático y naturaleza humana: Consonancia y conflicto"[5] escribió:

"Según la imagen sobre funciones que se forma el estudiante en la clase de álgebra elemental, una operación actúa sobre un objeto. El agente que realiza la operación toma un objeto y hace algo en él. Por ejemplo, un niño que juega con un juguete, puede moverlo, colorearlo o comprimirlo. El objeto antes de la acción es la entrada (input) y el objeto después de la acción es la salida (output). La operación es entonces transformar el input en output. El origen propuesto de esta concepción algebraica de las funciones es la experiencia infantil de actuar con objetos del mundo real… Inherente a esta concepción, está la experiencia de que una operación cambia el input – después de todo, lo que recibimos en primer lugar: usted mueve algo para cambiarlo de lugar, lo colorea para darle otra apariencia o lo comprime para cambiarle su forma.

Pero esto no es lo que ocurre en las matemáticas actuales o en la programación funcional. En el formalismo moderno de las funciones, ¡nada realmente cambia! Una función es un "mapeo entre dos conjuntos fijos", o aún más, en su forma extrema, una función es un conjunto de pares ordenados. Como la tendencia moderna de las matemáticas se inclina hacia lo algebraico y no a lo físico, concepciones como, imágenes de procesos, tiempo y cambio, quedan suprimidas."

Leron y otros han realizado varios estudios demostrando que muchos estudiantes de matemáticas y de ciencias de la computación en las universidades se han formado una concepción errónea de lo que es una función; asumiendo en particular que el aplicar una función a un argumento, cambia al argumento. Tal es la potencia de los ejemplos originales, que aunque se presenten en el marco formal de una definición correcta del concepto general de función, los estudiantes asumen características sugeridas por los ejemplos que no son parte del concepto en su forma abstracta. Se necesitará buen tiempo para que un instructor hábil y experto

[5] *Proceedings of the 28th Conference of the International Group fo the Psychology of Mathematics Education, 2004* (3) 217-224

le cambie al estudiante esa idea equivocada de lo que él tiene entendido por función.

Por tanto, mientras el entendimiento conceptual es una meta por la que los educadores deben luchar, necesitaríamos aceptar que éste no puede garantizarse, y en consecuencia no deberíamos permitirse seguir adelante, al menos que se entiendan los conceptos perfectamente.

Los autores del libro *En Suma*, citado arriba, parecen aceptar este problema. En lugar de insistir en un entendimiento completo de los conceptos, el comité se explaya en explicar qué significan ellos por “entendimiento conceptual” en los términos siguientes (op. cit. p. 141), “el entendimiento conceptual se refiere a una apropiación integral y funcional de las ideas matemáticas.”

El término clave aquí, como yo lo veo, es “apropiación integral y funcional.” Esto sugiere la aceptación de que una meta realista debe ser que el estudiante tenga suficiente claridad de entendimiento para trabajar inteligente y productivamente con el concepto y continúe haciendo progresos, mientras se permite que haga refinamientos futuros o aún correcciones, a la luz de nuevas experiencias de lo que él tenía entendido era el concepto. (Es posible que yo esté entendiendo palabras que no quisieron decir los miembros del comité del CNI (Consejo Nacional de Investigación). En ese caso imagino, que a la luz de mayores consideraciones ¡estaría yo refinando la idea de entendimiento conceptual!)

Dando paso al “entendimiento funcional”

Yo propongo llamar a esta noción suave de entendimiento conceptual; *entendimiento funcional*. Esto significa, burdamente hablando, entender un concepto suficientemente bien como para seguir adelante. Puesto que entendimiento funcional se define en términos de lo que el estudiante puede hacer con él. Esto permitiría, de una parte, chequear si el estudiante ha asimilado o no este aspecto funcional, y de otra, alejar mis dudas sobre el entendimiento conceptual.

Puesto que la distinción que hago aquí es bastante sutil, permítaseme presentar un dramático ejemplo. Como persona que inventó el cálculo, sería claramente absurdo decir que Newton no entendía lo que estaba haciendo. No obstante, él no tenía un entendimiento (conceptual) de los conceptos que soportan al cálculo como lo entendemos hoy – por la simple razón que estos conceptos no fueron desarrollados sino hasta fines del siglo XIX, doscientos cincuenta años después de la época de Newton. El entendimiento que tuvo Newton del cálculo, aunque seguramente profundo, pudo haber sido funcional. Euler mostró análogamente entendimiento funcional en relación con las series infinitas, aunque los conceptos sobre los que se fundamentan las series infinitas fueron desarrollados hasta mucho más tarde.

Una de las razones por la que los estudiantes de matemáticas en la universidad, progresan más lentamente en la asimilación de las técnicas matemáticas nuevas que sus colegas de física e ingeniería, es que sus profesores buscan que los estudiantes de matemáticas logren un entendimiento conceptual, mientras que los futuros físicos e ingenieros necesitan (a lo más) un entendimiento funcional de las matemáticas. (Se discute aun si ellos realmente necesitan eso; lo que realmente ellos necesitan es otra rama entre las cinco propuestas de la suficiencia matemática, la fluencia procedimental.) Yo he enseñado en universidades donde los profesores de ingeniería insisten en enseñar sus propias matemáticas, precisamente porque ellos desean que sus estudiantes progresen mucho más rápido (y más superficialmente) sobre los temas para los cuales los matemáticos se preparan con mayor dedicación.

Enseñar teniendo en mente el entendimiento funcional como meta, asume la responsabilidad de dejar abierta la posibilidad de que el estudiante revise o refine los conceptos a medida que avanza en el aprendizaje de temas subsiguientes. Esto significa que el instructor sí, debe conocer bien el concepto, como los matemáticos lo entienden y lo usan. Desafortunadamente, muchos estudios muestran que los maestros muy a menudo no tienen tal entendimiento, como tampoco lo tienen los autores de los textos escolares.

Voy a darles un ejemplo de cuan malos pueden llegar a ser los textos escolares. Estuve visitando a algunos destacados editores especialistas en matemáticas en Vancouver hace un tiempo y tocamos el tema de los textos escolares para la educación elemental. Una editora me dijo que los profesores a menudo explican a sus alumnos las ecuaciones en números enteros recurriendo a la balanza, sugiriendo a sus alumnos que se imaginen objetos colocados a lado y lado de ella en estado de equilibrio. Al adicionar números iguales a ambos lados de la ecuación, dijo ella, los maestros enseñan a sus alumnos, que es como si se adicionara pesos iguales a lado y lado de la balanza y el equilibrio se mantiene. El problema es ¿cómo manejar la sustracción, incluyendo casos donde el resultado es negativo? Yo respondí en son de broma: Bien… ¡uno podría decirle a los alumnos que se imaginen balones de helio atados a los extremos de la balanza! Precisamente, dijo la editora, eso es lo que los autores de los libros hacen y en lo cual no estamos de acuerdo (Ni yo tampoco, por supuesto.)

Sospecho que entre los miembros de la MAA no soy el único que ignora lo que ocurre a nivel de la educación matemática elemental. Mi interés profesional en educación matemática se extiende desde el nivel graduado hacia abajo hasta el grado superior de la escuela media, con mi grado de conocimiento decreciendo en la medida que voy de arriba hacia abajo. Puedo ver cómo la metáfora de los balones de helio trabaja para la tarea a mano: mostrar que sustracción es lo opuesto a adición. Pero ¡qué metáfora tan frágil! No sólo se quiebra al siguiente paso sino que establece un concepto mental que debe simplemente deshacerse. Este es seguramente un ejemplo típico: una metáfora que no es consistente con el concepto verdadero, y en consecuencia no conduce definitivamente a nada que pueda llamarse entendimiento conceptual.

Una solicitud

Ustedes, mis lectores regulares, probablemente saben que soy un matemático y no un profesional de la educación matemática. Conozco muchos matemáticos pero no así tantos especialistas en educación matemática. Sin embargo estoy interesado en cuestiones de educación matemática, y he sentido que desde hace rato los matemáticos tienen algo que contribuir al campo de la educación matemática. (¡Liberarnos de aquellos balones de helio sería un valioso primer paso! Que los profesores de aritmética paren de decir que la multiplicación es una suma abreviada sería lo segundo.) En efecto, me impacta y me sorprende que, nosotros siendo parte de la comunidad matemática educativa, hayamos estado tan largo tiempo al margen de la toma de decisiones en la comunidad. Afortunadamente este estado de cosas parece que ya es historia. En cualquier caso, lo que hoy escribo lo hago desde la perspectiva de un matemático, y me veré sorprendido si he dicho algo que no haya pasado por el tamiz de la comunidad de educación matemática ya muchas veces. Según esto, estaré interesado en recibir referencias con respecto a trabajos orientados en esta área.