¿Por qué 2 $\times$ 2 = 4, y no a 3 ó 5, por ejemplo?

Diego Pareja-Heredia. ***Universidad del Quindío***

"Entre más trivial la pregunta, más difícil su respuesta." Dicho popular.

2000 Mathematics Subject Classification 97D20.

Resumen: Una pregunta inocente sirve aquí de motivación para explorar algunas conexiones entre las matemáticas elementales de la educación básica y las matemáticas avanzadas. Aquí se relacionan conceptos de algebra y análisis vectorial con la razón de ser de la suma y la multiplicación: las tablas y los algoritmos que sirven a estas operaciones.

Abstract: An innocent question is the motivation to explore some connections between elementary mathematics from K-12 curriculum and some advanced mathematics. In this paper we present algebra and vector analysis concepts applied to the explanation of addition and multiplication tables together with the associated algorithms.

1. Introducción. A Kurt Gödel, uno de los más grandes lógicos que ha dado la humanidad, le apodaban cuando niño, el señor ¿por qué? (en alemán, "der Herr Warum"), por su hábito inquisitivo. Y es que así son los niños, preguntando permanentemente en busca de razones que soporten la información que reciben. Esa inclinación natural de los seres humanos a buscar los porqués de todo, es lo que ha dado origen a la filosofía, a la lógica, a las ciencias y por supuesto a las matemáticas.

La enseñanza de las matemáticas, hay que decirlo, no se ha distinguido sin embargo por dar razones que satisfagan la curiosidad de los alumnos en lo que respecta a las llamadas cuatro operaciones. La metodología que se sigue no difiere mucho de la enseñanza del dogma. Las cosas son así, porque son así: dos por dos cuatro y ya. La memorización de las tablas de multiplicar es la muestra palpable de ese estilo dogmático y memorístico que ha caracterizado a la enseñanza de las matemáticas en las escuelas. Pero eso está a punto de cambiar, como se siente en el seno de la comunidad matemática mundial. Las críticas a este estilo de enseñanza se ven reflejadas en artículos firmados por matemáticos de renombre y por educadores de trayectoria (Ver por ejemplo los trabajos de Anthony Ralston, Alan Schoenfeld[1], Jeremy Kilpatrick[2], Paul Lockhard[3]). Algunos matemáticos proponen alternativas tan radicales como suprimir en la escuela primaria la enseñanza de la aritmética de papel y lápiz y sustituirla por el aprendizaje de procesos algorítmicos mentales que faciliten el cálculo.[4]

Mi propuesta para poner al día la enseñanza de las matemáticas básicas va mucho más allá, busca de una parte, alternativas que reemplacen la enseñanza rutinaria, por una práctica

[1]Ver por ejemplo: ***Reflections on an Impoverished Education*** en: http://www.maa.org/ql/049-54.pdf

[2] Ver: Kilpatrick, J. ***The Mathematics Teacher and Curriculum Change*** en: http://www.pna.es/Numeros/pdf/Kilaptrick2009The.pdf

[3] *El lamento de un matemático* se puede leer en: http://www.maa.org/devlin/LockhartsLament.pdf

[4] Ralston, A**. *Let's Abolish Pencil-and-Paper Arithmetic***. Journal of Computers in Mathematics and Science Teaching. Volume 18, Number 2, pp. 173-194 (1999).

razonada de aprendizaje de los algoritmos básicos de la aritmética, y de una nueva metodología de estudio que conduzca a la teoría de números como fue concebida en la época de oro de la cultura griega y también con el aditivo de una puesta al día en temas matemáticos vigentes relacionados con álgebra, espacios vectoriales, análisis y lógica moderna post Gödel. A lo largo de este artículo dirigido a los profesores de enseñanza primaria propongo reflexionar sobre temas elementales de aritmética e invito a estudiar la aritmética en un contexto amplio que incluye conexiones con el álgebra y el análisis vectorial elemental. La idea general es empezar con el *bit* y llegar a las *Wavelets*.[5]

En el prefacio de una de sus obras[6], Raymond L Wilder, afirmaba:

> "...las matemáticas son una de las más importantes componentes culturales de toda sociedad moderna. Su influencia sobre otros elementos culturales ha sido tan fundamental y tan difundida, como para garantizar la afirmación de que nuestras más modernas formas de vida no habrían sido posibles sin el recurso de las matemáticas".

Es en este contexto sociológico-cultural donde quisiera que se desarrollara la enseñanza de las matemáticas, haciendo énfasis en la unidad de las matemáticas como una herramienta para entender el mundo; no sólo el nicho local donde vivimos, sino también el conglomerado global que la cultura humana a lo largo de milenios ha logrado conformar. En esta cultura social globalizada, las matemáticas se hacen indispensables para poder interpretar, analizar y aplicar para propio beneficio, el gran volumen de información al que estamos expuestos.

2. Un poco de historia. En tiempos de la cultura griega existió una escuela matemática, iniciada por Pitágoras, los *pitagóricos*, que nos dejó un legado importante en aritmética y algebra geométrica. Los pitagóricos elaboraban tablas de sumar y multiplicar para uso de los comerciantes y funcionarios del estado que enseñaban a utilizar, pero nunca decían como construirlas. Este monopolio del conocimiento fue común en algunas sociedades antiguas razón por la cual mantenían cierto poder social y político. Es interesante notar cómo, este estilo de enseñanza de algoritmos y tablas se mantiene frecuentemente hoy, como si desde el tiempo de los pitagóricos hasta nuestros días nada hubiera pasado en materia de matemáticas elementales.

En otros artículos[7] he mostrado el atraso que acusa la enseñaza de las matemáticas en relación con sus contenidos. El ignorar, cuando enseñamos matemáticas básicas, las

---

[5] El *bit* es la unidad de memoria para almacenar un dígito binario. Las *Wavelets* se pueden entender como extensiones de los espacios vectoriales útiles en las aplicaciones de la moderna tecnología de la información.

[6] WILDER, R. L. ***Evolution of Mathematical Concepts. An Elementary Study***. John Wiley & Sons, Inc. New York. 1968. Pag. vii.

[7] Ver por ejemplo: *El Gran Vacío* en la página 6 de
http://www.matematicasyfilosofiaenelaula.info/Epistemologia%202009/Epistemolog%C3%ADa.%20Introducci%C3%B3n%20y%20Propuesta%20Metodol%C3%B3gica.pdf ,
Del Bit a las Wavelets. Hacia un radical cambio en la Enseñanza de las matemáticas.
http://www.matematicasyfilosofiaenelaula.info/conferencias/Del%20Bit%20a%20las%20Wavelets%20XVII%

matemáticas que nos legaron Euler, Gauss, Fourier y Riemann, para citar sólo cuatro grandes nombres en la historia de las matemáticas, muestra el nivel de atraso en cuanto a contenidos y en cuanto al amplio espectro matemático que dejamos por fuera del aprendizaje de nuestros estudiantes que se gradúan en la escuela secundaria.

Las matemáticas han tenido grandes revoluciones a lo largo de los más de cuatro mil años de historia. Desafortunadamente en el transcurso de la educación básica poco hablamos de ello y casi nada decimos sobre la última de todas: *la revolución informática*. La primera se dio en Babilonia hace aproximadamente cuatro mil años cuando la cultura sumeria utilizó las matemáticas para la elaboración de los primeros calendarios. La segunda revolución ocurrió con la axiomatización de la geometría en el tiempo de Euclides en siglo III AC, la tercera ocurre con la aparición del sistema hindú-arábigo de numeración en el siglo IX y su popularización con la obra *Liber Abaci* de Leonardo Fibonacci empezando el siglo XIII. La cuarta es consecuencia de la invención del Cálculo por Newton y Leibniz en el siglo XVII. La quinta revolución se origina con la introducción de las series de Fourier en 1810. La sexta tiene que ver con la aparición de las geometrías no euclidianas en el siglo XIX, cuyos orígenes están en trabajos de Gauss, Lobachevsky, Bolyai y Riemann. La séptima está relacionada con el cierre de un importante período de enfrentamientos teóricos en torno al problema de los fundamentos de las matemáticas y de los inicios de la revolución informática que despega con los trabajos de Gödel sobre incompletitud y los trabajos de Turing relacionados con computabilidad y con máquinas que llevan su nombre; de las cuales el computador moderno es una de sus mayores sofisticaciones.

Al llegar la calculadora de bolsillo y el computador a convertirse en elementos personales, la enseñanza de las matemáticas debe necesariamente cambiar. Antes enseñábamos las operaciones aritméticas con un objetivo específico: el cálculo aritmético o sea, el hallar resultados con el recurso de las cuatro operaciones básicas. Hoy eso ya no es prioridad, Debemos enseñar matemáticas amparados en otras razones, ya no sólo de carácter práctico sino de carácter formativo y cultural. La época en que vivimos nos exige más criterio intelectual que habilidad manual para hallar resultados numéricos. La enseñanza de las matemáticas debe apuntar más a la explicación y justificación racional de las operaciones y procesos que a la memorización de algoritmos y procedimientos. No es necesario por ejemplo enseñar al niño de hoy a dividir por el método reiterativo que usaron las generaciones pasadas por cuanto que en la práctica nadie así lo hace, no sólo por su dificultad (allí se emplean las cuatro operaciones y una más como es la estimación), sino por el tiempo que lleva este largo procedimiento. No se puede ser competitivo en el mundo de hoy, recurriendo a métodos anticuados.

De las operaciones básicas, la multiplicación es la que más se resiste a una explicación racional. Hay muchas maneras de explicar el concepto de suma. Desde la primera infancia el niño empieza a contar recurriendo a un proceso por el que reiterativamente va sumando uno, a menudo con el recurso inmediato de los dedos de sus manos. La multiplicación por el contrario es un procedimiento que a nivel elemental no es fácil explicar. Con una

---

20CNM%20-%20CALI.pdf y *Educación, Humanismo y Matemáticas. Una Visión histórica.* *http://www.matematicasyfilosofiaenelaula.info/conferencias.htm* formación más madura en matemáticas, las cosas cambian porque la multiplicación se puede hasta definir axiomáticamente como una función.

Este corto artículo busca dar, en términos de lo más primitivo, una explicación para la multiplicación de dos números. Aquí nos referiremos a los números naturales (el cero incluido) como elementos primitivos, en el sentido de que suponemos su existencia y comprensión intuitiva. En otros artículos hemos hecho un tratamiento más extenso y detallado de los números naturales[8]. Empecemos por referirnos a la representación de los números naturales. La concepción de número en general viene genéticamente con el ser humano. Esa aprehensión del concepto de número nace del sentido del hombre de diferenciar entre lo largo y lo corto, entre lo grande y lo pequeño, entre lo simple y lo compuesto, entre lo único y lo numeroso, etc. Sin embargo por ser el número un concepto abstracto, así como lo es la blancura, la bondad y otras cualidades, es necesario asociarlo a símbolos que faciliten a la mente su evocación. Esos símbolos que evocan los números pueden ser palabras, numerales o algún otro símbolo que lo represente.

Los antiguos babilonios usaron representación cuneiforme para los números, con dos elementos básicos, la cuña horizontal y la cuña vertical. Con base en ellos representaban las primeras sesenta cifras (más exactamente de 1 a 59 y el cero) y los demás números. ¿Por qué se escogió sesenta y no otro número como base de su numeración? La explicación podría tener, principalmente razones de conveniencia, sobre todo para astronomía por cuanto que, la medida angular y del tiempo se hacía en minutos y segundos y además porque 60 permite la división por 1, 2, 3, 4, 5, 6, 10, 12, 15, 20 y 30. El usar una base como 60 para representar los números obliga a elaborar tablas de multiplicar de 60 por 60 entradas. ¡Imagínense la dificultad para aprender de memoria unas tablas como esas!

En tiempos griegos hubo dos sistemas de numeración: el *jónico*, que usó las letras minúsculas del alfabeto, y el *ático*, donde los símbolos eran letras mayúsculas y superposición de ellas. Aquí como en el caso del sistema sexagesimal de los babilonios el aprenderse de memoria las tablas de multiplicar debió ser toda una odisea, por ejemplo un término de la tabla contenía, $\varsigma \times \theta = \xi\gamma$, que significa $7\times 9 = 60 + 3$. Así mismo para elaborar estas tablas de multiplicar se requería un entrenamiento al que sólo ciertas personas de la élite tenían acceso. El sistema romano facilitó un poco las cosas pero tampoco se convirtió en la solución definitiva.

Hubo que esperar hasta los siglos VIII y IX cuando los árabes trajeron a occidente la invención del sistema decimal posicional que empleamos hoy y cuyos orígenes se remontan a la cultura hindú. Además del sistema decimal, los árabes nos trajeron los algoritmos o procedimientos para sumar y multiplicar que aprendimos en la escuela y que aun hoy se resisten a abandonar los salones de clases amparados por una corriente, por cierto cada vez menor, de abanderados de la causa de la aritmética de papel y lápiz. En otra parte he discutido la conveniencia o no de mantener el sistema decimal como el único de uso común en la sociedad moderna[9]. Como veremos en seguida, en tratándose de enseñar los

---

[8] Ver por ejemplo mis notas de epistemología en: www.matematicasyfilosofiaenelaula.info
[9] Ver el texto de mi exposición en el Congreso Nacional de Matemáticas, Cali 2009,

algoritmos de la suma y la multiplicación hay un sistema mucho más simple y comprensible que el decimal. Se trata del sistema binario que puede introducirse desde el preescolar facilitando el estudio y la comprensión de la aritmética y acelerando el aprendizaje de las matemáticas.

3. Las razones detrás de los algoritmos y los procedimientos aritméticos. Como mencionábamos arriba, la representación escrita de los números la hacemos con el recurso de los numerales, que para el caso del sistema decimal, se forman con los dígitos: 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, cuyo valor va a depender de su posición en el numeral. Estos dígitos o cifras, como también se llaman[10], representan, por ejemplo en el número **2867**: 2 unidades de mil o dos millares (o 2000 si se quiere), 8 representa ocho centenas u ochocientos, 6 está para significar 6 decenas ó 60 y finalmente 7 son las unidades simples. Cada posición difiere de las aledañas en un múltiplo de 10. Más exactamente, el número **2867** corresponde a la expansión $2\times10^3 + 8\times10^2 + 6\times10^1 + 7\times10^0$. Por definición, aquí 10^0 corresponde a 1. Es decir:

$$\mathbf{2867} = 2\times10^3 + 8\times10^2 + 6\times10^1 + 7\times10^0 = \sum_{j=0}^{3} a_{3-j}10^{3-j} \qquad (1)$$

Donde $a_0 = 7$, $a_1 = 6$, $a_2 = 8$, y, $a_3 = 2$. Al cambiar 10 por x a la derecha de (1), la expresión que resulta es una entidad algebraica del tipo

$$P(x) = \sum_{j=0}^{k} a_{k-j}x^{k-j} \qquad (2)$$

Expresiones como (2) son ejemplos de una clase especial de expresiones algebraicas conocidas como polinomios. Estos polinomios juegan un rol importante en la concepción del número como representación en una base específica. En el polinomio (2) se puede escoger x entre los enteros positivos distintos de uno. Este número escogido va a servir de base para el sistema y los a_i serán los dígitos o cifras (números enteros positivos) que satisfacen la propiedad, $0 \le a_i \le x - 1$. El sistema numérico más simple ocurre obviamente cuando $x = 2$ y da origen al sistema binario, caso en el cual los dígitos son **0** y **1**. La representación binaria de los números naturales nos permite responder al más elemental nivel, la pregunta formulada en el título de este trabajo.

Lo sorprendente del trabajo de los hindúes en cuanto a la representación decimal de los números es su aspecto práctico. En primer lugar está el hecho de que con sólo diez dígitos se pueda representar todos los números. Además el valor de esos dígitos va a depender de la posición que ocupan en el numeral. Por ejemplo en el numeral 2222, el primer dos, de

Del Bit a las Wavelets. Hacia un radical cambio en la Enseñanza de las matemáticas, en: *http://www.matematicasyfilosofiaenelaula.info/conferencias/Del%20Bit%20a%20las%20Wavelets%20XVII%20CNM%20-%20CALI.pdf*

[10] El término cifra se origina en la palabra árabe *cifr* que fue traducida al latín como *zefirum*, de donde se deriva también la palabra cero.

izquierda a derecha, tiene un valor de dos mil, el segundo de doscientos, el tercero de veinte y el cuarto de dos unidades. En segundo lugar hay que destacar la introducción de un símbolo especial para el cero, o mejor un símbolo para señalar un lugar desocupado, cuando unidades decenas, etc., están ausentes. Ese símbolo es el **0**, que juega además el rol del cardinal del conjunto vacío.

Sistemas numéricos con las características arriba descritas se llaman posicionales. Sus numerales ***n***, pueden pensarse como asociados a vectores del tipo

$$\boldsymbol{n} = (a_k\,,\ a_{k-1}, ...,\ a_1\,,\ a_0), \qquad (3)$$

donde sus componentes a_j son los dígitos que representan al número ***n***. Las componentes no pueden cambiar su posición sin cambiar al vector. Estos vectores son arreglos lineales en los que el orden de las componentes si importa, a diferencia de la representación de los conjuntos en la cual el orden de los elementos no importa. El vector definido en (3), obedece a una estructura matemática conocida como espacio vectorial, que tiene entre otras propiedades el poderse expresar, en forma única, como combinación lineal de unos vectores muy especiales conocidos como vectores unitarios. Más exactamente ***n*** puede expresarse como suma de múltiplos de vectores unitarios así:

$$\boldsymbol{n} = \sum_{j=0}^{k} a_{k-j} A_{k-j}$$

donde a_{k-j} son los dígitos del número y A_{k-j} son los vectores unitarios, cuyas componentes son todas nulas, salvo aquella que está en el lugar *i*-ésimo, $0 \le i \le k$, de derecha a izquierda, la que será 1. Explicitamente estos serán los vectores unitarios:

A_0 = (0, …, 0, 1), A_1 = (0, …, 1, 0), …, A_{k-1} = (0, 1, …, 0, 0) y A_k = (1, 0,…, 0, 0)

El producto de un número (escalar) por un vector es el vector que resulta de multiplicar cada una de las componentes del vector dado por el escalar. La suma de vectores se define como el vector resultante de sumar componente a componente, en su orden los elementos de los dos vectores. El término escalar se origina en el hecho de que la multiplicación se puede interpretar como un cambio de escala que afecta al número o al vector que se multiplica por el escalar. Lo anterior nos da pie para interpretar a los números como suma de una clase especial de vectores. Pensemos de nuevo en 2867. Éste número puede interpretarse como formado por las componentes del vector:

$$(2, 8, 6, 7) = \sum_{j=0}^{3} a_{3-j} A_{3-j} = 2(1, 0, 0, 0) + 8(0, 1, 0, 0) + 6(0, 0, 1, 0) + 7(0, 0, 0, 1).$$

Diremos entonces que el primer vector (1, 0, 0, 0) es el vector de los millares, el segundo (0, 1, 0, 0) el vector de las centenas, (0, 0, 1, 0) el vector de las decenas y (0, 0, 0, 1) determina el vector de las unidades simples. Esta forma de mirar la representación de los números, nos permite mostrar al niño una manera diferente de estudiar los números y a ña vez nos da la oportunidad de combinar cosas elementales como son los números con conceptos de mayor profundidad como son los espacios vectoriales. Los vectores en este caso nos ayudan a dar sentido valorativo a las partes constitutivas del número.

En análisis vectorial se define otra operación conocida como producto escalar (diferente al que definimos arriba) que consiste en multiplicar dos vectores para obtener un número (un escalar) que es la suma de los productos componente por componente. Por ejemplo, supongamos que tenemos los dos vectores $\mathbf{N} = (2, 8, 6, 7)$ y $\mathbf{D} = (10^3, 10^2, 10^1, 10^0)$, entonces su producto escalar, denotado por $\mathbf{N} \bullet \mathbf{D}$ es,

$$\mathbf{N} \bullet \mathbf{D} = (2, 8, 6, 7) \bullet (10^3, 10^2, 10^1, 10^0) = 2\times10^3 + 8\times10^2 + 6\times10^1 + 7\times10^0 = 2867$$

Esto muestra que el número 2867 se puede expresar como un producto escalar, donde los vectores que intervienes son los formados por los dígitos del número en su orden y las potencias descendientes de 10.

¿Pero que hay de particular en esto? Lo importante hasta ahora es saber que los números se pueden asociar a vectores y a través de ellos acercarnos a nuevas formas de realizar operaciones aritméticas como la suma y la multiplicación.

4. La adición en sistemas posicionales de base *x*. Desde la infancia aprendemos a sumar, pero lamentablemente en forma rutinaria, desconociendo la razón que justifica el algoritmo o procedimiento que se sigue. El procedimiento que seguimos para la adición es básicamente el mismo que heredamos de Al-Kuarizmi. Este gran matemático árabe de la corte de Al-Mamun en el siglo IX contribuyó a la aritmética, al álgebra, a la geografía y a la astronomía en lo que fue la famosa Casa de la Sabiduría de Bagdad[11]. Este procedimiento deriva de la aritmética decimal cuyos orígenes hay que buscarlos en la cultura hindú de los primeros siglos de nuestra era. Parece que no hay razones categóricas que justifiquen a perpetuidad el uso de estos algoritmos, sabiendo que Gauss[12] nos enseñó a ver la aritmética desde un punto de vista, no sólo más general, sino también más simple y razonado como lo veremos en seguida.

Los algoritmos de las operaciones aritméticas van a depender de la base del sistema numérico que se escoja. Desde la edad media usamos el sistema decimal y allí seguimos sin dar opción a otros sistemas, quizá más ágiles y apropiados para el aprendizaje de la aritmética. Cuando se habla de un sistema numérico posicional de base x, estamos significando que la unidad básica de medida es x. Esto significa que las cantidades son agrupadas o contadas por paquetes, digamos de dimensión o tamaño x, o de magnitudes que son potencias de x. Así por ejemplo en el sistema decimal tomamos decenas, centenas, millares, etc., como unidades básicas para descomponer cada número. El número 2867, por ejemplo está constituido por 2 millares, 8 centenas, 6 decenas y 7 unidades. Parece un poco extraño que escribamos los números con las cifras de mayor valor a la izquierda y disminuyendo hacia la derecha, cuando sería más fácil su lectura empezando por las

---

[11] Berggren, J. L. *Episodes in the Mathematics of Medieval Islam*. Springer- Verlag. New York. 1986. Pags. 6-9.

[12] Gauss, K. F. *Disquisitiones Arithmeticae*. Academia de Colombiana de Ciencias Exactas, Físicas y Naturales. Santa Fe de Bogotá, D. C. 1995. Pags. 7 y siguientes.

unidades, luego decenas, centenas y así sucesivamente. Esta aparentemente irregularidad, quizá esté justificada por el modo de escribir de los árabes que es de derecha a izquierda. Si ese es el caso, en árabe el número se leería 7682: 7 unidades, 6 decenas, 8 centenas y 2 millares.

El proceso de sumar dos números consiste en ir adicionando sucesivamente las unidades de orden menor para completar unidades del siguiente orden, las que se suman con sus homólogas, repitiendo el proceso hasta las unidades de orden superior. En apariencia el método es muy simple y responde en el fondo al modo en que se suman polinomios o en la forma intuitiva de sumar cosas de la misma especie. La aparición de los polinomios permite un primer acercamiento al álgebra y así a un nivel mayor de abstracción, donde las operaciones elementales de suma y multiplicación aparecen conjuntamente e insinúan una nueva operación como es la potenciación. Veamos otro ejemplo que ilustra esta situación. Sumar los números **2867** y **5132**, siguiendo el enfoque polinómico, es sumar:

$$\boldsymbol{P}(x) = 2x^3 + 8x^2 + 6x^1 + 7x^0, \quad \text{y}, \quad \boldsymbol{Q}(x) = 5x^3 + 1x^2 + 3x^1 + 2x^0,$$

Y reconvertir el polinomio resultante de nuevo a un número, en la siguiente forma:

$$\boldsymbol{P}(x) + \boldsymbol{Q}(x) = (2x^3 + 5x^3) + (8x^2 + 1x^2) + (6x^1 + 3x^1) + (7x^0 + 2x^0) = 7x^3 + 9x^2 + 9x^1 + 9x^0.$$

Al sustituir x por 10, se tiene

$$\mathbf{2867 + 5132} = \boldsymbol{P}(10) + \boldsymbol{Q}(10) = 7\times 10^3 + 9\times 10^2 + 9\times 10^1 + 9\times 10^0 = \mathbf{7999}.$$

El ejemplo se ha escogido a propósito para evitar llevar unidades de un orden, al orden superior, lo que ocurre cuando las sumas parciales superan a 10. Cuando esto sucede simplemente las unidades superiores pasan al siguiente nivel y se suman en la forma usual. Este proceso de llevar la suma de las unidades de un orden al siguiente, está ligado con la aritmética de base $\boldsymbol{x}$, o si se quiere con las tablas elementales de la suma, en nuestro caso la tabla de la suma en base 10 que memorizamos en la escuela como requisito para aprender el algoritmo de la suma[13]. La aritmética de base $\boldsymbol{x}$ (un entero positivo diferente de 1) permite representar los números en forma de polinomios como se describió al principio y donde las tablas de suma y multiplicación se establecen desde el principio. Mediante estas tablas quedan también definidas unívocamente estas operaciones. Más específicamente, en esta aritmética las cifras están asociadas a $\boldsymbol{x}$ símbolos como: $\mathbf{0, 1, 2, \ldots, \boldsymbol{x} - 1}$. La aritmética más simple se encuentra tomando $\boldsymbol{x} = 2$, caso para el cual hallamos la aritmética binaria, la misma aritmética por la que se rige el computador digital, cuyas tablas de sumar y multiplicar no podían ser más simples:

[13] En mi artículo *El poder del Dos* [http://www.matematicasyfilosofiaenelaula.info/conferencias/El%20poder%20del%20Dos2.pdf.] analizo la conveniencia de enseñar aritmética binaria para agilizar el aprendizaje de los procesos algorítmicos de la suma y la multiplicación.

$\oplus$	**0**	**1**	$\otimes$	**0**	**1**
0	**0**	**1**	**0**	**0**	**0**
1	**1**	**10**	**1**	**0**	**1**

Claramente se ve que lo que hay que memorizar aquí es lo mínimo posible. Para el caso de la multiplicación, sólo hay que recordar que **1** $\otimes$ **1** = **1**, todas las otras entradas son ceros. Para el caso de la suma, lo único que no resulta obvio es que **1** $\oplus$ **1** = **10**. La razón de esto es que, como la base es 2 (notado así en base 10 ó **10** en forma binaria**),** al sumar **1** $\oplus$ **1** se está arribando al valor de la base (o sea 2), para lo cual se necesita una cifra más. Ocurre lo mismo cuando se pasa de 9 (el mayor dígito en el sistema decimal) al siguiente número que es 10 (si la base es decimal) se vuelve a iniciar un nuevo ciclo que va del 10 al 99.

Para la aritmética binaria, entonces lo único no obvio para memorizar es **1** $\oplus$ **1** = **10** y **1** $\otimes$ **1** = **1**. De otro lado si sabemos que todo número se puede expresar como un polinomio, la aritmética módulo dos en los polinomios se simplificará al máximo. Si denotamos por $\oplus$ y $\otimes$ las operaciones de la aritmética base 2 o binaria, la suma de dos números **n** y **m** quedará asociados a la suma dos polinomios del tipo:

$$\sum_{j=0}^{k} a_{k-j}x^{k-j} + \sum_{j=0}^{k} b_{k-j}x^{k-j} = \boldsymbol{P}(x) + \boldsymbol{Q}(x)$$

$$= \sum_{j=0}^{j=k} [(a_{k-j} \otimes x^{k-j}) \oplus (b_{k-j} \otimes x^{k-j})] = \sum_{j=0}^{j=k} [(a_{k-j} \oplus b_{k-j}) \otimes x^{k-j})] \qquad (4)$$

Aunque compleja en apariencia la fórmula (4) sintetiza toda la mecánica de la suma base dos. Veamos un ejemplo donde aplicar esta fórmula. Supongamos que ***n*** y ***m*** están expresados en base 2, esto es, sus cifras son **0**, ó, **1**, digamos, ***n*** = **10** y ***m*** = **10**. Aquí a_o = **0**, a_1 = **1**, b_o = 0, y, b_1 = **1**. Entonces sumando unidades y sumando pares

$$\boldsymbol{n} \oplus \boldsymbol{m} = \mathbf{10} \oplus \mathbf{10} = (\mathbf{0} \oplus \mathbf{0}) \otimes 2^0 \oplus (\mathbf{1} \oplus \mathbf{1}) \otimes 2^1 \qquad (5)$$

Aplicando las tablas de sumar dadas arriba tenemos que **0** $\oplus$ **0** = **0** y **1** $\oplus$ **1** = **10**. También, por definición 2^0 = 1, 2^1= 2, y, 2 se representa en sistema binario como **10**. Por lo tanto (5) toma la forma

$$\boldsymbol{n} \oplus \boldsymbol{m} = (\mathbf{0} \otimes \mathbf{1}) \oplus (\mathbf{10}) \otimes (\mathbf{10}) = \mathbf{0} \oplus (\mathbf{10}) \otimes (\mathbf{10}) = \mathbf{10} \otimes \mathbf{10} \qquad (6)$$

Así, el problema inicial de multiplicar **10** $\otimes$ **10** se convierte en el problema de calcular **10** $\oplus$ **10**. Simbólicamente

$$2\times 2 = \mathbf{10} \otimes \mathbf{10} = \mathbf{10} \oplus \mathbf{10} = (1\times 2^1 + 0\times 2^0) + (1\times 2^1 + 0\times 2^0) = 2\times 2^1 + 0\times 2^0 = 2^2 = 4.$$

En consecuencia, el problema de explicar por qué $2\times 2 = 4$, es el mismo que explicar por qué $2 + 2 = 4$. O en otras palabras: dos por dos es cuatro por la misma razón que dos más dos es cuatro. Esto se sigue de la última serie de igualdades arriba. Los anteriores razonamientos nos inducen a creer que el número binario **10** (ó 2 en forma decimal) es el único número positivo que tiene la propiedad: $x \times x = x + x$, ó, $x^2 = 2x$. En efecto 2 es la única solución positiva de la ecuación cuadrática

$$x^2 - 2x = 0 .$$

La igualdad trivial $2\times 2 = 4$ nos sirvió de motivación para dar un paseo por distintos tópicos de aritmética y algebra y más importante aun, poner al alcance de los niños de primaria una ventana hacia el análisis vectorial y hacia formas distintas de ver los números naturales.

La propuesta que vengo sustentando de unos años para acá busca vertebrar todas las matemáticas de la primaria y la básica secundaria alrededor de un eje central constituido por aritmética, algebra, análisis matemático y lógica moderna post Gödel. Las geometrías (euclidiana y no euclidianas) quedarían incluidas en las fronteras entre el álgebra y el análisis matemático. Queda por fuera aparentemente la teoría de probabilidades. Sin embargo si en análisis se incluye el estudio de polinomios de Bernstein, será muy fácil dar el salto al movimiento browniano y de allí, vía el valor esperado y la varianza como motivación, llegar a la definición de espacio muestral y medida de probabilidad.

Decíamos al principio que la multiplicación no era fácil explicar. Sin embargo si entendemos que la suma y la multiplicación de números naturales se pueden entender como casos particulares de las mismas operaciones en polinomios, sí podemos dar una explicación racional de las mismas teniendo en cuenta que toda la aritmética que se haga con los coeficientes, en últimas, se puede reducir al uso de las tablas de suma y multiplicación en el sistema binario. Estas tablas por su simplicidad y sobre todo por su significado inmediatamente aprehensible por la mente, hacen de ellas en mi opinión, la mejor forma de dar sentido a los algoritmos para las operaciones aritméticas que se enseñan en la escuela.

Queda mucho por hacer y planear en tratándose de organizar un currículo para la educación básica. Lo mencionado aquí corresponde apenas a unas puntadas en lo que tiene que ver con los contenidos matemáticos para la educación elemental.

Armenia, Colombia, noviembre de 2009.