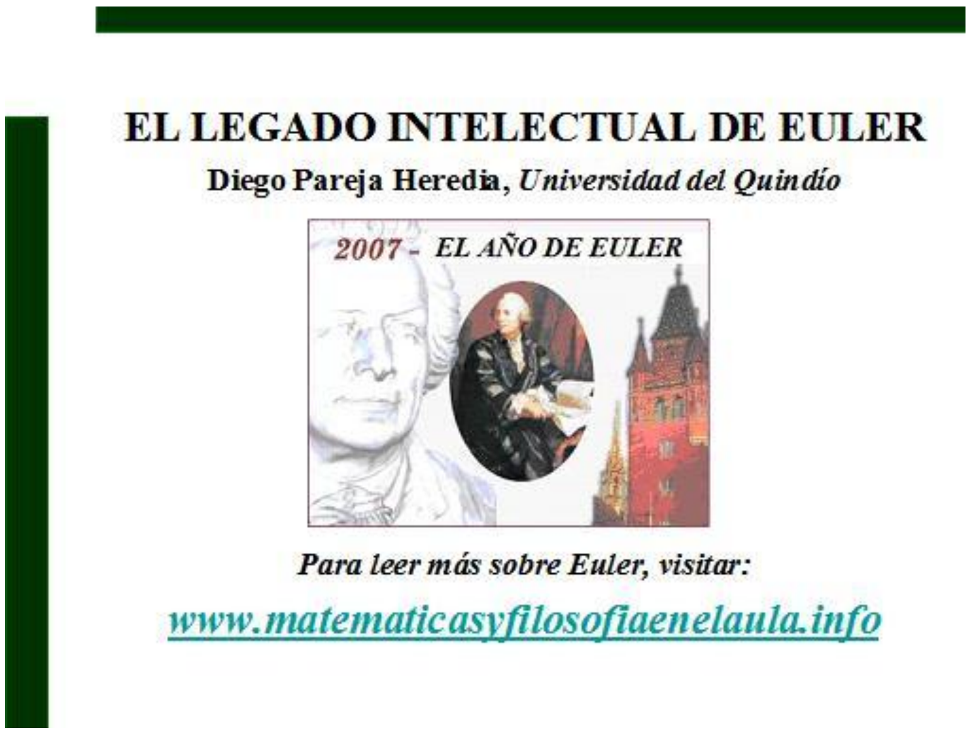


Diapositiva No. 1 de la presentación en el XVI Congreso Nacional de Matemáticas, realizado en Medellín, Julio de 2007[1].

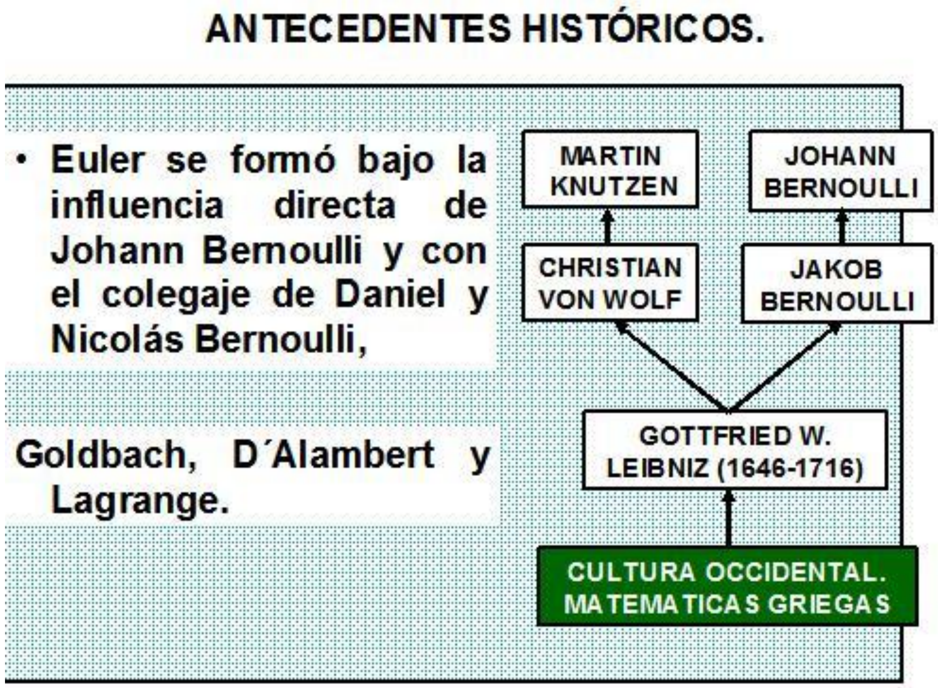
1. – INTRODUCCIÓN.

Esta exposición pretende destacar la importancia de Leonhard Euler (1707-1783), como uno de los grandes eslabones en la red matemático-cultural que arraiga profundo en la cultura de occidente. Cultura matemática que tiene sus primeros asomos en los tiempos de Hammurabi en Mesopotamia y en el valle del Nilo en Egipto por el II milenio antes de Cristo; que recorre la antigua Grecia, entrelaza y corre parejo con la filosofía, pasa de soslayo en la penumbra de la edad media y avanza por el renacimiento, hasta llegar a Wilhelm Leibniz (1646-1716). Podemos comparar esta red de transmisión cultural a un árbol cuyas raíces reposan en las primeras culturas de occidente, siguiendo su ascenso hasta encontrar a Leibniz que servirá de tronco básico, de donde se desprenden dos ramas, a las que me referiré como: la vertiente filosófica, iniciada con su discípulo Cristian von Wolff (1679-1754), y la vertiente matemática originada en su otro discípulo, el matemático Jakob Bernoulli (1654-1705).

Cristian von Wolff, fue un filósofo que hizo honor a su maestro por su amplísima cultura humanista y por su apego al método matemático, en el que la razón, juega papel preponderante. Entre sus méritos se le reconoce la gran influencia que tuvo en la educación alemana a nivel de pregrado y el hecho de haber orientado discípulos de la talla de Martin Knutzen (1713-1751), quien sería a su vez el mentor intelectual de Kant. Además de ser el mayor filósofo entre Leibniz

[1] Las notas que siguen, complementan las diapositivas de una charla expuesta en el XVI Congreso Nacional de Matemáticas celebrado en Medellín, con la presidencia honoraria del señor alcalde de Medellín, el matemático Sergio Fajardo Valderrama, quien figura como uno de los elementos maximales en las cadenas que aquí se describen. El afiche promocional que se muestra, fue tomado de la Mathematical Association of America.

y Kant, von Wolff, tiene el mérito de haber dado a la lengua alemana un carácter universalista, por cuanto su obra la escribe y la difunde en su lengua materna, sin desconocer que también tuvo al latín como una lengua culta. No escapó a su conocimiento, nacientes disciplinas, como la economía y la administración pública, enfatizando en la importancia de la naturaleza profesional que debe tener la educación universitaria. Nacido en Breslau (ahora Polonia, pero por esa época en Silesia una parte de la antigua Prusia) y así en cierto sentido, coterráneo del matemático de la escuela de Gotinga, Richard Courant.



Diapositiva No. 2. Se muestra esquemáticamente las raíces culturales que soportan el ancestro científico-cultural de Leonhard Euler.

A Jakob Bernoulli lo hemos ubicado encabezando la vertiente matemática, no sólo por seguir los pasos de Leibniz, sino también por su fabulosa creatividad y por ser uno de los creadores de las bases del análisis matemático, de la teoría de probabilidades, de la teoría de series, de la mecánica y del cálculo de variaciones.

En esta intrincada red de conexiones originadas en la relación maestro-discípulo, vamos a destacar, por razones que se verán al final, dos cadenas que parten de Leibniz: la una toca a Inmanuel Kant, y en la otra encontramos a Euler. Estas cadenas que veremos correr a lo largo de tres siglos hasta llegar a nuestros días, exhiben nombres de matemáticos y filósofos que han hecho historia en las matemáticas, en la filosofía, o en ambas.

El año 2007, lo ha declarado la comunidad matemática mundial, como *el año de Euler*, en razón a que estamos celebrando trescientos años del nacimiento del prolífico y extraordinario matemático, nacido en Basilea, Suiza, en pleno siglo de la ilustración: el siglo XVIII.

2. – Antecedentes históricos.
Entre los logros matemáticos del siglo XVII, debemos mencionar la invención del cálculo, originada en los trabajos de Leibniz y de Newton. Aunque la polémica sobre la prioridad de dicha invención tocó a los protagonistas de nuestra historia, no nos detendremos a entrar en detalles sobre esto, pero mencionemos sí, que un ferviente defensor de Leibniz en este asunto fue Johann Bernoulli (1667-1748), el hermano de Jakob. El estudio juicioso de los escritos de Leibniz por parte de Johann le dieron la formación matemática suficiente como para estar a la altura de su hermano Jakob, doce años mayor que él y ya un profesor universitario de matemáticas. Durante una visita a París conoció al Marqués de L´Hôpital a quien dio lecciones de cálculo diferencial e integral. Las notas de clase y la correspondencia en estos temas, fueron publicadas por el marqués, como obra suya y es por eso que ciertas reglas del cálculo llevan el nombre de *Reglas de L´Hôpital.*

Johann Bernoulli cubrió muchas áreas de las matemáticas y de la física de su tiempo, a tal punto que sus contemporáneos le apodaron el "*Arquímedes de su época*". Resolvió el problema de la catenaria, trabajó en series infinitas con el recurso del cálculo integral, recurso que también usó para la solución de ecuaciones diferenciales. Propuso los problemas de la braquistocrona y de la curva isoperimétrica[2], cuyas soluciones lo conducirían a la creación de lo que hoy llamamos *cálculo de variaciones*. Johann recibió el titulo de médico pero fue en matemáticas donde se distinguió y pasó a la historia como el maestro de Euler. La dimensión de la estatura intelectual de Johann Bernoulli se aprecia mejor al saber que, las academias de París, Berlín, Bolonia, Londres y San Petersburgo lo acogieron como uno de sus miembros. Tres de sus hijos, Nicolás, Daniel y Johann II, llegarían a ser matemáticos de renombre y colegas, o relacionados con Euler.

Leonhard Euler creció en un ambiente propicio a la creación matemática. La mayor influencia la recibió de Johann Bernoulli quien fue su tutor y guía. La estrecha relación con Daniel y Nicolás Bernoulli, hijos de Johann le abriría las puertas de la Academia Imperial de San Petersburgo, por cuanto ellos estaban allá, cuando Euler fue invitado a formar parte de esta prestigiosa institución. En este primer período, Euler estuvo trabajando como profesor de física y en la dirección de la sección de matemáticas durante catorce años. Por invitación del emperador Federico "el grande" se traslado a Berlín para trabajar en la Academia de Ciencias de Berlín, en donde su producción científica alcanzaría niveles fuera de lo común, casi cuatrocientas obras, entre libros, artículos, informes, etc., además de una variedad de asesorías que debía prestar a diferentes entidades del gobierno. Entre estos trabajos, citemos algunas áreas sobre las que escribió: Cálculo de variaciones, cálculo de órbitas planetarias, sobre balística y artillería, análisis infinitesimal, sobre

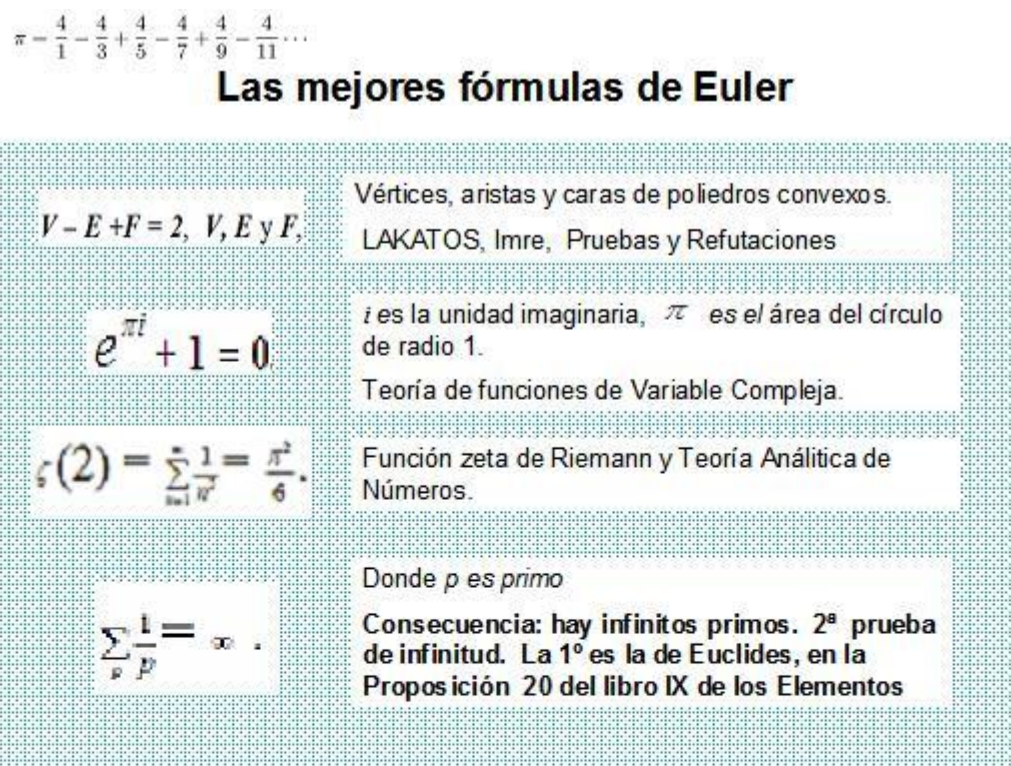
---

[2] La braquistocrona corresponde a la curva que hoy llamamos *cicloide*, aquella curva que resulta de la traza que deja un punto fijo de una circunferencia que rueda, sin deslizar sobre una superficie plana. Esta curva resuelve el problema de saber cuál es la trayectoria que sigue un móvil que desciende (sin ser caída libre) por una superficie sin fricción de tal manera que el tiempo de caída sea mínimo. El problema de isoperimetría, propone encontrar la curva simple de una longitud dada que encierre la mayor área. Esta curva es la circunferencia. El cálculo de variaciones tiene que ver con la búsqueda de funciones que satisfagan unas condiciones dadas. La catenaria es la curva que resulta al fijar los extremos de una cadena y dejarla flexionar por efecto de la gravedad. La circunferencia, la cicloide y la catenaria están dentro de las curvas que estudia el cálculo de variaciones.

navegación y construcción naval y sobre divulgación científica, como fue el caso de *Cartas a una Princesa Alemana*, una obra muy difundida en su tiempo.

En la Academia de Berlín permaneció por veinticinco años, dejando el cargo para aceptar la invitación de Catalina II la Grande, de Rusia, a volver a la Academia de San Petersburgo. Allí trabajo hasta su muerte en 1783. No obstante su ceguera total, esta última etapa de su vida fue la más productiva desde el punto de vista científico. La Academia se mantuvo publicando su legado científico hasta muchos años después de su desaparición. Hoy la *Opera Omnia*, de Euler supera los ochenta volúmenes y probablemente sigan más. Este año de celebración, varias entidades se han comprometido en la difusión y en la recuperación de materiales relacionados con su vasta producción matemática. La *Mathematical Association of America*, ha puesto en el mercado del libro, varias obras relacionadas con la vida y con el legado matemático de Euler. Columnas sobre Euler aparecen en varias instituciones. Basta citar la muy visitada, aquella de Ed Sandifer en: http://www.maa.org, *How Euler did it*, donde uno encuentra temas matemáticos fascinantes, originados en la obra de Euler.

Sus nexos con las mayores academias de Europa le dieron la oportunidad de relacionarse con personalidades científicas y literarias, tan importantes como, Jean le Rond D`Alembert (1717-1783), François-Marie Arouet, más conocido como Voltaire (1694-1778), Christian Goldbach (1690-1764), y el naturalista Pierre-Louis Moreau de Maupertuis (1698-1759), que fue presidente de la Academia de Berlín y a quien, a partir de 1759, sucedió Euler en el liderazgo de la misma.



Diapositiva No. 3. Según el autor, cuatro de las mejores fórmulas originadas en los trabajos de Euler.

3. – Las mejores fórmulas de Euler.
De los centenares de resultados y fórmulas matemáticas a las que llegó Euler a lo largo de su amplia producción intelectual, he escogido unas pocas que, personalmente califico como, lo mejor de lo mejor.

3.1 *Una fórmula para sólidos convexos***.**

$$V - E + F = 2,$$

Donde ***V***, representa el número de vértices, ***E***, es el número de aristas y ***F*** corresponde al número de caras del sólido convexo. Por ejemplo, si se toma un libro (la representación física de un paralelepípedo) y se cuentan, *vértices, aristas y caras*, uno encuentra que: ***V*** = 8, ***E*** =12 y ***F*** = 6 y así,

$$V - E + F = 8 - 12 + 6 = 2.$$

Esta fórmula sirve a Imre Lakatos como centro de motivación para su obra *Pruebas y Refutaciones.* [3]

3.2 *Historia y matemáticas en una fórmula*.

$$e^{\pi i} + 1 = 0$$

La fórmula precedente se atribuye a Euler y es considerada una de las más bellas representaciones de la unidad de las matemáticas, pues involucra, además de símbolos matemáticos fundamentales; como los correspondientes a la igualdad, a la adición y exponenciación, los números más importantes que figuran en las matemáticas: $\boldsymbol{e}$, π, $\boldsymbol{i}$, **1**, y **0**. Un recuento detallado de los orígenes de esta fórmula se encuentra en la columna que publica en la *Mathematical Association of America* el profesor Ed Sandifer en: http://www.maa.org/

3.3 *El Problema de Basilea.* La ciudad natal de Euler tuvo una tradición matemática muy importante, porque además de Johann y Jakob Bernoulli otros famosos matemáticos fueron oriundos de esta ciudad. En el tiempo de Euler se creo la inquietud por el cálculo de la serie:

$$\sum_{n=1}^{n=\infty} \frac{1}{n^2}.$$

Que pasó a llamarse el problema de Basilea. Fue Euler que probó que la serie tiene el valor $\frac{\pi^2}{6}$.

La serie es un caso especial de la función $\varsigma(s)$, estudiada por Euler y hoy conocida como función *zeta* de Riemann.

3.4 *Una forma alternativa de probar que hay infinitos primos.*

La proposición 20 del libro IX de los Elementos de Euclides, conduce a una prueba de la infinitud de los números primos. Una prueba alternativa de que los números primos son infinitos se sigue de la siguiente igualdad propuesta por Euler:

---

[3] LAKATOS, I. *Pruebas y Refutaciones*. Alianza Editorial. Madrid

$$\sum_{p,\,primo} \frac{1}{p} = \infty \qquad \textbf{(*)}$$

Esta fórmula causó sorpresa, porque, aunque la serie armónica[4] diverge, la suma de los inversos de los primos, ½ +1/3 + 1/5 + 1/7 + … +1/*p* + ..., podría pensarse que converge, por cuanto los primos, aunque los sabemos infinitos, aparecen cada vez más espaciados a medida que *p* crece.

La prueba de infinitud de los primos, es consecuencia directa de **(*),** porque si hubiere sólo un número finito de primos, la suma de sus recíprocos sería finita, contradiciendo lo ya probado por Euler que (*) se cumple.

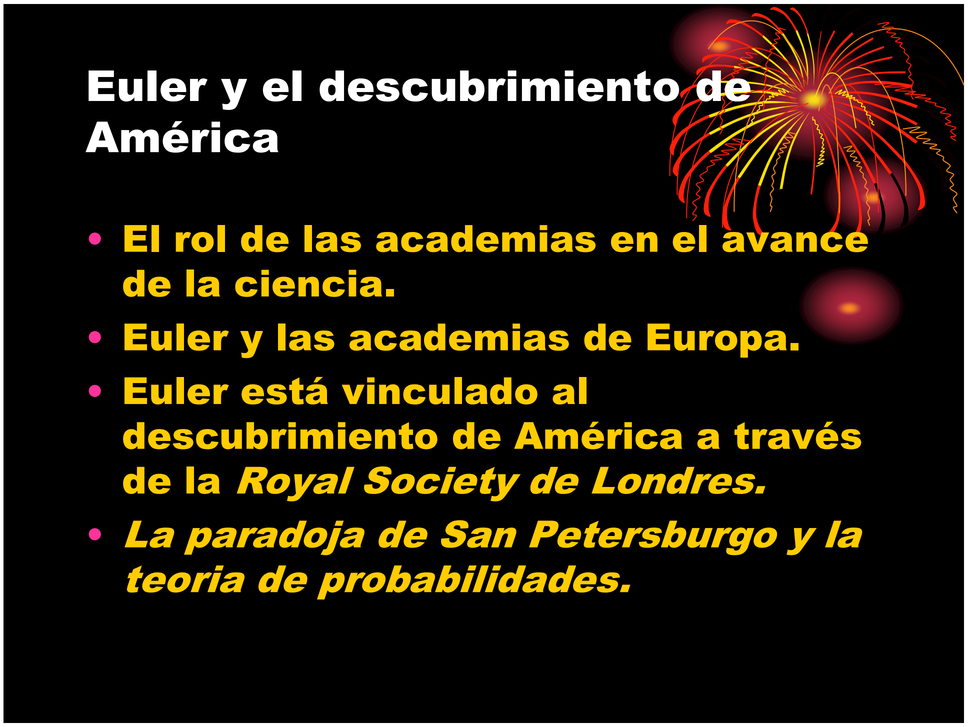
Diapositiva No. 4. A Euler se le atribuye la solución del problema clásico de la teoría de grafos "*Los Siete Puentes de Königsberg*".

4. Los Siete Puentes de Königsberg.

La ciudad de Königsberg, hoy Kaliningrado, Rusia, fue ciudad cultural y enclave histórico importante en el tiempo de Euler. Allí nacieron personajes célebres como Inmanuel Kant, Christian Goldbach y David Hilbert.

Era costumbre de la época, realizar paseos dominicales recorriendo los siete puentes que interlazaban la ciudad bañada por el río Pregel. Los paseantes notaron que no era posible cerrar el paseo con el recorrido de todos los puentes sin pasar dos veces por uno de ellos. Fue Euler quien, a través de la teoría de grafos, probó la imposibilidad de hacer estos recorridos con las condiciones dadas.

[4] La serie armónica corresponde a la suma infinita de los recíprocos de los números naturales.



Diapositiva No. 5. Euler comunicó oficialmente a la Real Society de Londres el descubrimiento hecho por Bering y otros, de que América era un continente separado de Asia.

5. Euler y el descubrimiento de América.

Ed Sandifer en su columna de la MAA[5], muestra cómo Euler, por sus funciones en la Academia de San Petersburgo se enteró de los descubrimientos realizados por Vitus Jonassen Bering (1681-1741), en relación con sus exploraciones en los confines de Siberia, para descubrir que Asia y América eran continentes separados por el estrecho, que hoy lleva el nombre de Bering, y que así, America no era una península de Asia, como Cristóbal Colón y otros navegantes de los siglos anteriores habían pensado. El mundo había sido circunnavegado, pero América no. Euler reportó oficialmente estos hallazgos a la Real Society de Londres y desde allí la geografía y consecuentemente las cartas geográficas fueron ajustadas a estos descubrimientos.

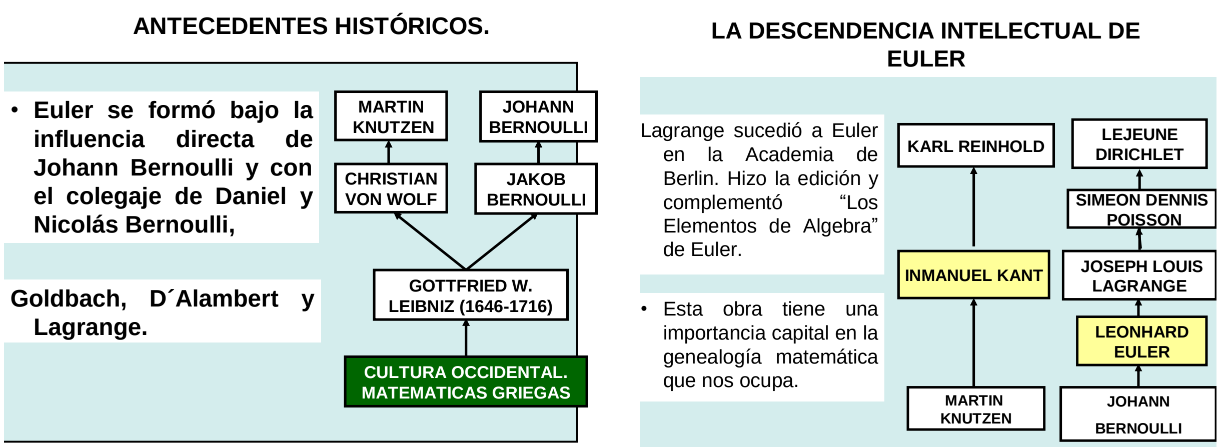
Leonhard Euler estuvo vinculado directamente a las academias de Berlín y San Petersburgo por muchos años, e indirectamente a la Academia de Paris, por los muchos premios recibidos de ella y a la Royal Society de Londres a través de su correspondencia con los funcionarios de la misma. Las academias europeas ejercieron mucha influencia, no únicamente en el plano científico, sino que además fueron organismos que propendieron por los cambios, en política social y educativa en los países de su influencia. Por ejemplo, por la Academia de Berlín pasaron matemáticos tan prestigiosos como Leibniz, Lambert, Lagrange, Crelle, y el mismo Euler. La Academia de París

---

[5] Sandifer hace unas consideraciones importantes que permiten atribuir a Euler el honor del descubrimiento de América. Visitar: http://www.maa.org/news/howeulerdidit.html

empieza a funcionar desde el año 1666, como culminación de los esfuerzos de matemáticos célebres, empezando por Marin Mersenne, que con su entusiasmo y sus habilidades epistolares logró aglutinar a matemáticos como Descartes, Pascal (padre e hijo), Fermat, Desargues, Roberval y Galileo. Por esta academia pasarían grandes matemáticos como Cauchy, Fourier y Poisson, Laplace y en ella recibirían los afamados premios además de Euler, los Bernoulli, Fresnel, Abel, Jacobi, Kummer y Sturm, entre otros.

Euler fue un matemático de amplio espectro que dejó huella en todas las áreas, desde la teoría de números hasta la teoría de probabilidades. Esta última, apenas en sus inicios, con resultados puntuales que venían desde el tiempo de Cardano en el siglo XVI y con soluciones a problemas específicos dadas por Pascal, Fermat y más recientemente con la obra seminal de Jakob, Johann, Nicolás y Daniel Bernoulli. Precisamente, este último, mientras estuvo en la Academia de San Petersburgo, estudió un problema hoy conocido como la paradoja de San Petersburgo en la cual aparece una inconsistencia con relación a la esperanza matemática de un juego de apuestas originado en el lanzamiento de una moneda. Entre los artículos inéditos de Euler aparece uno relacionado con este tema, pero que según Sandifer[6], no se publicó, porque al parecer, su colega en San Petersburgo, Daniel Bernoulli escribió uno mejor sobre lo mismo, el que publicó en 1731.



Diapositiva Nos. 2 y 6. El árbol genealógico que se bifurca en Leibniz, da origen a dos ramas: primero, la *filosófica*, muestra a Kant, y segundo, la *matemática*, donde está Euler como descendiente intelectual directo de Leibniz.

6. La descendencia intelectual de Euler.

La ascendencia de Euler la miramos en la diapositiva No. 1, donde se muestra a Leibniz como el maestro de Jakob Bernoulli y de Christian von Wolff. Discípulos de ellos son respectivamente Johann Bernoulli y Martin Knutzen. Kant es discípulo de Knutzen, mientras que Euler lo es de Johann Bernoulli y así continúa el árbol genealógico con Joseph Louis Lagrange (1736-1813) en el lado matemático y con Karl Reinhold (1757-1823) en la descendencia filosófica.

Lagrange, fue un matemático de muchas facetas, que contribuyó no únicamente a las matemáticas, sino también a la mecánica, a la astronomía y a la naciente teoría de probabilidades.

[6] Ver la columna de Julio 2007 del profesor Sandifer en: http://www.maa.org/news/howeulerdidit.html.

Aunque nacido en Turín, hoy Italia, se considera un matemático francés que influyó grandemente en los ámbitos académicos de París, por ser profesor de la Escuela Normal Superior y del Politécnico de París. Sin ser discípulo directo, se lo considera en la cadena de descendientes de Euler, por varias razones. La primera es que fue su admirador y mantuvo correspondencia científica desde su época de profesor en Turín. Pero además y es muy significativo el hecho que el mismo Euler lo invitó y lo propuso como miembro de la Academia de Ciencias de Berlin, cuando el matemático suizo era considerado uno de los grandes en esta academia. Por recomendación de D´Alambert, Lagrange fue nombrado sucesor de Euler en la Academia de Berlín, donde permanecería alrededor de veinte años. Y finalmente es Lagrange quien corrige y aumenta el clásico, aun hoy en imprenta, *Elementos de Algebra* de Euler. Entre las obras emblemáticas con las que se recuerda a Lagrange está su *Mecánica Analítica*.

Lagrange es invitado a Paris, donde estará vinculado a la Academia y dejará varios importantes discípulos, entre ellos a Siméon Denis Poisson (1781-1840). Poisson, recordado hoy en teoría de probabilidades, por la distribución que lleva su nombre, fue también un discípulo aventajado de Laplace y Legendre, los otros grandes matemáticos franceses de comienzos del siglo XIX. Poisson no sólo se distinguió en matemáticas, también lo hizo en física y en teoría de probabilidades. Su nombre se recuerda en áreas como teoría de potencial, en ecuaciones diferenciales, en electricidad y en teoría de elasticidad.

Por la época en que Poisson era profesor en Paris, llegó Lejeune Dirichlet (1805-1859) procedente de Alemania con miras a asimilar las tendencias matemáticas de Francia que por esa época tenían un nivel mayor que en su tierra natal. En París fue alumno o estuvo bajo la influencia de los grandes matemáticos franceses, Fourier, Laplace, Legendre y por supuesto Poisson. Su fama como matemático se inicia con la prueba del Último Teorema de Fermat para $n = 5$, que se publicó en 1825, cuando apenas completaba los veinte años. Posteriormente haría la prueba para n=14. Después de terminar sus estudios en Francia, fue invitado a regresar a Alemania, sobre todo por insinuación de Alexander von Humboldt, el gran naturalista alemán y hermano de Wilhelm von Humboldt[7], ministro de Educación en Alemania. Dirichlet perteneció a la Academia de Berlín y terminó su carrera científica como profesor de la Universidad de Gotinga, universidad que ejercería un dinamismo vivificador en las matemáticas alemanas, como veremos adelante. Dirichlet fue un matemático universalista en el sentido de tener un dominio de todas las matemáticas de su tiempo, desde la teoría de números hasta el análisis matemático. Su nombre aparece en la teoría de series infinitas, en la teoría algebraica y analítica de números, en ecuaciones diferenciales, en análisis complejo, etc. Su influencia intelectual continúa hasta nuestros días, al ser parte de la cadena matemática que hemos iniciado con Leibniz en el siglo XVIII.

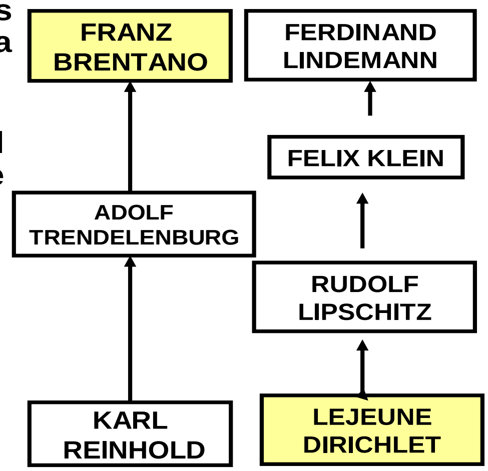
En la cadena filosófica de la que hemos venido hablando, después de Kant, hemos colocado a Karl Leonhard Reinhold (1757-1823), un filósofo austriaco muy influyente que difundió la filosofía Kantiana y uno de los líderes de la *Ilustración* que llegó a Alemania a comienzos del

[7] Wilhelm von Humboldt fue ministro de educación y un humanista influyente en los círculos intelectuales alemanes de esa época. La educación alemana experimentó toda una revolución como consecuencia de las reformas implementadas por von Humboldt. Detalles de estos cambios pueden leerse en mi artículo *Educación matemática. De felix Klein a Hyman Bass*, en: http://www.matematicasyfilosofiaenelaula.info/conferencias.htm.

siglo XIX. Sus tendencias filosóficas proclaman la necesidad de asociar a la filosofía una presentación científica. Su influencia fue definitiva en filósofos contemporáneos suyos y posteriores. Aunque ordenado sacerdote, fue monje y luego se convirtió al protestantismo para terminar como Francmasón. Siempre fue tolerante en materia religiosa y un completo humanista y libre pensador.

PARIS, GOTINGA, BONN, ERLANGEN

- **Dirichlet estudió en París con Poisson y fue colega de Lagrange en Berlín.**
- **Su nombre figura en el Cálculo y la teoría de números. U. T. F. n=5, 14**
- **Uno de sus alumnos, Lipschitz, siguió su tradición. En Bonn fue asesor de Klein, quien a su vez, tuvo a Lindemann como su estudiante en Erlangen.**



Diapositiva No. 7. Se muestran aquí las descendencias académicas de Reinhold, en el lado filosófico y de Dirichlet en su contraparte matemática.

7. PARIS, GOTINGA, BONN, ERLANGEN.

Dirichlet ambientado en las matemáticas francesas, lleva a Alemania las nuevas tendencias y las eleva al nivel de liderazgo, el que se hará patente en la influencia que ejercerá en una generación de matemáticos de la más alta calidad y producción intelectual. Entre estos: Leopold Kronecker, Ferdinand Eisenstein y Rudolf Lipschitz. Kronecker, es el padre del intuicionismo en matemáticas y a quien se le endilga la frase "Dios hizo los naturales, todo lo demás es obra del hombre". Eisenstein, fue considerado por Gauss como uno de los grandes matemáticos de todos los tiempos y al igual que Galois y Abel, murió antes de cumplir los treinta años. Sus contribuciones a la teoría de números son excepcionales. Demostró la ley de reciprocidad bicuadrática, que el mismo Gauss había propuesto pero sin lograr una prueba.

Lipschitz contribuyó a muchas áreas de las matemáticas, desde la teoría de números hasta las ecuaciones diferenciales y los sistemas dinámicos. La hoy conocida como, condición de Lipschitz, garantiza la existencia de una única solución para la ecuación diferencial del tipo $y' = f(x,y)$, ecuación estudiada por Peano y para la cual él dio condiciones de solubilidad. Mientras fue profesor de la Universidad de Bonn tuvo como alumno a Felix Klein (1849 - 1925) y es por esta razón que Lipschitz se convierte en un importante eslabón en nuestra cadena intelectual, que según el *Mathematics Genealogy Project* [8] genera 27727 descendientes hasta la época presente.

Felix Klein es uno de los grandes héroes en el campo matemático[9]. No únicamente por su producción matemática que fue espléndida, sino además por haber hecho honor a la educación matemática, a la que llevó a sus más altos estándares, al compartir su sapiencia con sus colegas, desde los niveles elementales, hasta las esferas internacionales, como que fue el primer presidente de la *International Commission of Mathematical Instruction*, una institución que promueve la cooperación internacional para bien del desarrollo y el fomento de las matemáticas y sus aplicaciones en el campo de la educación. Una muestra de su compromiso con la educación son los cincuenta y ocho estudiantes a quienes asesoró en su tesis de doctor. Entre ellos Ferdinand Lindemann, quien a su vez sería, profesor y asesor de tesis de David Hilbert en la Universidad de Königsberg.

Ferdinand Lindemann (1852-1939), pasó a la historia de las matemáticas como el primero en demostrar la trascendencia de π. Que π es irracional fue demostrado por Johann Lambert (1728-1777) en 1768, pero su trascendencia fue consecuencia de trabajos previamente elaborados por Charles Hermite (1922-1901) relacionados con la trascendencia de *e*, el número de Euler y que Lindemann aprovechó para su demostración[10].

Reinhold tuvo como alumno a Friedrich Adolf Trendelenburg (1802-1872), un filósofo de mucha influencia en Alemania a mediados del siglo XIX y que a su vez orientó en su tesis de grado de doctorado a Franz Brentano (1838-1917), el prolífico escritor y filósofo alemán, uno de los antecesores de movimientos tan importantes como la fenomenología y la filosofía analítica. De esta rama filosófica se va a desprender buena parte de la escuela polaca tanto en filosofía como en matemáticas. Polonia fue, hasta la Segunda Guerra Mundial, un país que se repartían los imperios vecinos, Rusia, Alemania y el imperio Austro-Húngaro. Algunos matemáticos que figuran como alemanes, realmente nacieron en lo que hoy, desde el punto vista cultural, es Polonia.

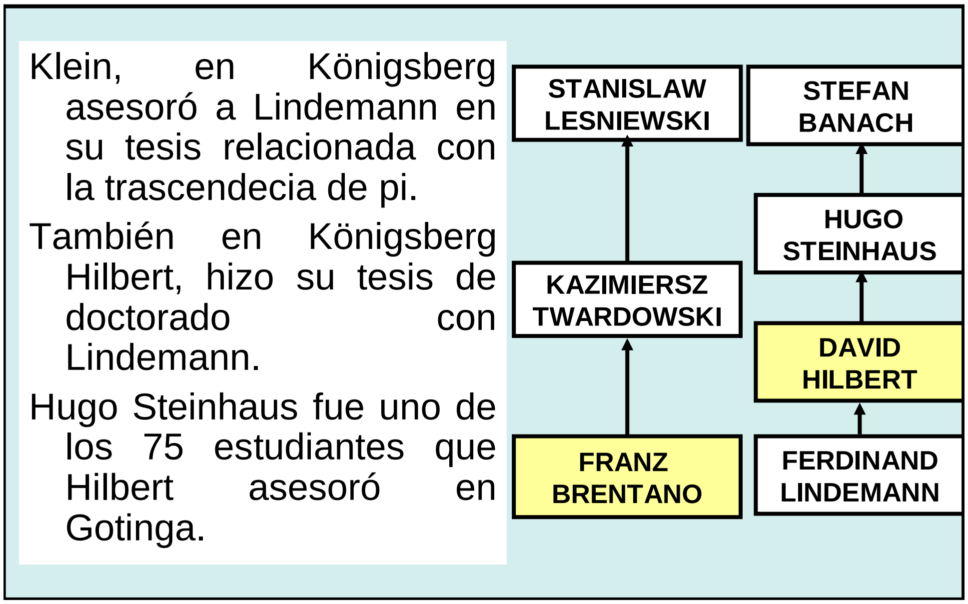
[8] Ver: http://www.genealogy.math.ndsu.nodak.edu/index.php

[9] Una corta nota sobre el compromiso de Klein con la educación puede leerse en, *Educación matemática. De Felix Klein a Hyman Bass:* http://www.matematicasyfilosofiaenelaula.info/conferencias.htm

[10] La prueba de este hecho la describe Klein en el libro: *Famous Problems and other Monographs*. Chelsea. New York. 1962.

DE KÖNIGSBERG A GOTINGA

"*Nada ha estremecido tan profundamente el espíritu humano, como el infinito* ". D. Hilbert



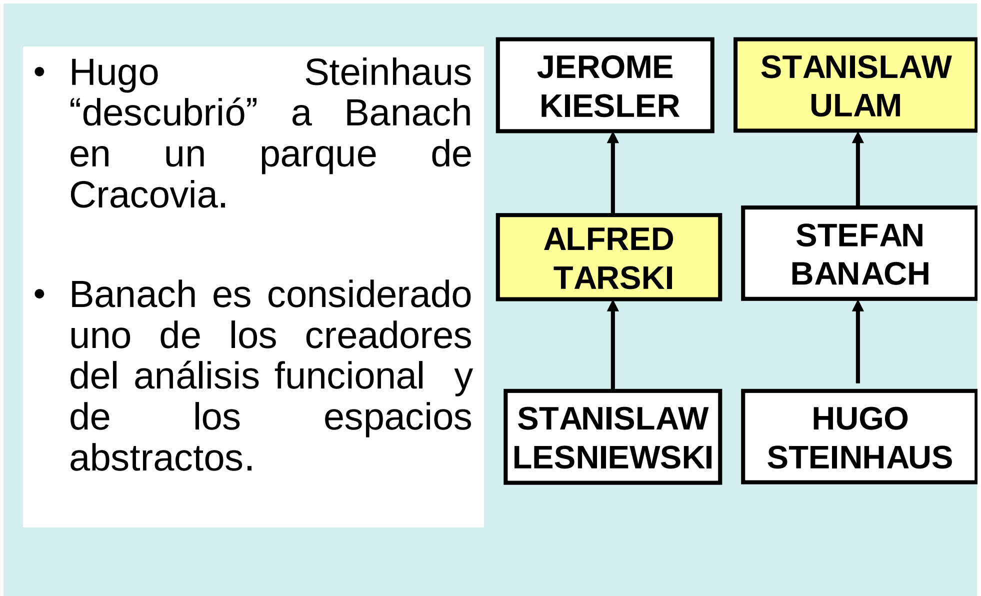
Diapositiva No. 8. Aquí se nota el transbase filosófico-matemático de Alemania a Polonia.

8. De Königsberg a Gotinga y a Polonia.

La Universidad de Gotinga gozaba de una tradición matemática desde el tiempo en que Gauss fue profesor. Sin embargo, su mayor desarrollo e influencia se dio durante el período en que Felix Klein, y luego David Hilbert, se desempeñaron como profesores en ella. David Hilbert (1862-1943) unió a su penetrante investigación en matemáticas, la habilidad para atraer estudiantes brillantes que harían de la Universidad de Gotinga la "*meca de las matemáticas*". Gotinga fue entonces, un enclave importante en lo que se refiere a la creación matemática, y como centro de reunión de celebridades a nivel mundial. Por allí pasarían matemáticos rusos como Urysohn y Alexandrov, americanos, como, Veblen y Mac Lane, franceses como, Poincaré y Herbrand y daneses como los hermanos Niels y Harald Bohr y de otras nacionalidades que harían una larga lista. Hilbert es el matemático más influyente y más citado en el siglo XX. Sus aportes a los fundamentos de las matemáticas originaron toda una escuela de pensamiento conocida hoy como *formalismo*. Hilbert, nació en Königsberg, ciudad famosa desde el tiempo de Euler y que hoy figura como Kaliningrado, Rusia. Al igual que Klein, Hilbert fue un fructífero profesor, como se verifica al observar el número de estudiantes que hicieron la tesis doctoral con su asesoría: setenta y cinco, y dejó además, una descendencia intelectual de 14362 doctores en matemáticas. Aquí incluimos al matemático Hugo Steinhaus, que será nuestra conexión con la escuela polaca de matemáticas.

LA TRADICIÓN MATEMÁTICA POLACA

***“A lo infinito se llega rápido, a lo finito, toma más tiempo.”* S. Ulam**



Diapositiva No. 9. Las escuelas polacas en matemáticas y en filosofía llegan a su pináculo con Stefan Banach y con Alfred Tarski en el segundo cuarto del siglo XX.

9. La tradición matemática polaca.

Wladislav Hugo Steinhaus (1887-1972), fue uno de los impulsores de las matemáticas en Polonia a comienzos del siglo XX. Él afirmaba que su mayor éxito matemático, había sido “el descubrimiento” del gran matemático Stefan Banach, quien llevaría el análisis a los espacios abstractos. La confluencia de tantos y tan creativos matemáticos en Polonia, entre los que figuran Zygmunt Janiszewski (1888-1920), Sierpinski y Kuratowski, sólo para citar algunos, hizo que apareciera, una de las más prestigiosas escuelas de matemáticas en Europa, la *Escuela matemática polaca*, que ejercería enorme influencia en todo el mundo. Entre las figuras de esta escuela que serían luego verdaderas luminarias citemos a Alfred Tarski, a Samuel Eilenberg y a Stanislaw M. Ulam. Janiszewski, el iniciador de la escuela, estudio primero con Hilbert, Zermelo y Minkowski en Gotinga y luego en París con Poincaré, Hadamard y Lebesgue, con quien hizo su tesis de doctor.

Steinhaus estudio en Gotinga dirigido por Caratheodory, Klein, Courant y Zermelo entre otros. Su tesis de grado, bajo la dirección de Hilbert, tiene relación con el *Principio de Dirichlet*, muy en moda por esa época en Alemania. Sus nexos con Banach se inician, cuando Steinhaus escucha, una conversación entre dos jóvenes matemáticos sobre el tema, exótico para esa época, de medida de Lebesgue. Esos jóvenes resultaron ser Stefan Banach (1892-1945)[11] y Otto Nikodym.

[11] Detalles de la vida y algo de la obra matemática de Banach se puede leer en: KALUZA, R. *The Life of Stefan Banach.* Birkhauser. Boston. 1995

Banach y Steinhaus crearon la *Sociedad Polaca de Matemáticas* y fueron gestores de importantes revistas internacionales de matemáticas publicadas en Polonia, como *Fundamenta Mathematicae y Studia Mathematica*, esta última dedicada al análisis funcional, una de las áreas en las que Banach haría importantes contribuciones.

A Banach lo consideramos como uno de los creadores de los espacios abstractos y su nombre está ligado a importantes conceptos y resultados, como, *Espacios de Banach, límites de Banach* y *Teorema de Hahn-Banach*. Entre sus estudiantes destacados figura Stanislaw M. Ulam (1909-1984) quien se formo bajo la influencia de la escuela polaca de matemáticas, pero que muy joven viajó a las universidades de Harvard y de Princeton primero, y luego desarrollaría su carrera matemática, un tiempo como investigador al lado, entre otros, de John von Neumann (1903-1957) y Richard Feynman (1918-1988) en el proyecto Manhattan, que desembocaría en la creación de la bomba de hidrógeno y luego en la Universidad de Colorado, donde tuve la oportunidad de ser su alumno entre 1970 y 1971.

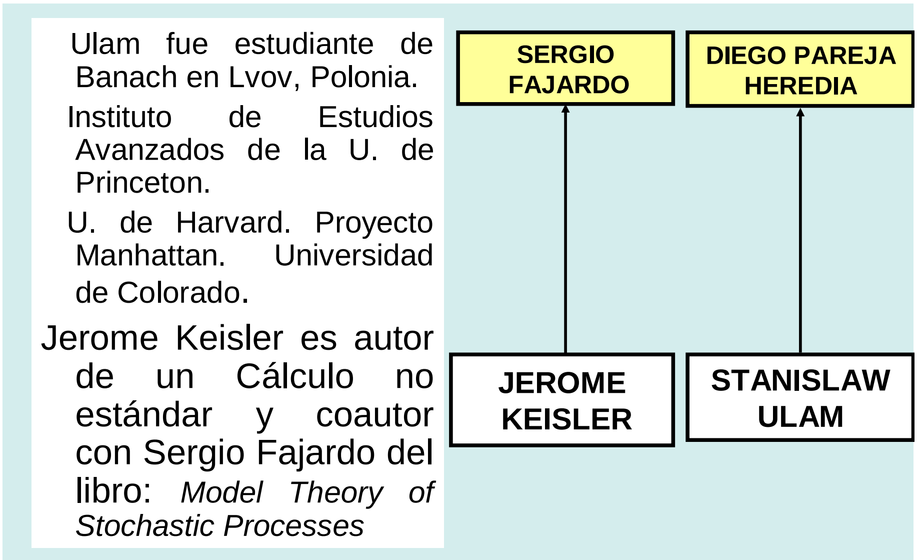
Paralelo al desarrollo matemático en Polonia se crea también una escuela filosófica que tendría mucha influencia en el siglo XX. Entre los filósofos destacados de esta escuela figura Kazimierz Twardowski (1866-1938), discípulo de Franz Brentano y creador de toda una tradición lógica y científica asentada sobre todo en la ciudad de Lvov (hoy Lviv, Ukrania). De esta escuela provienen lógicos tan destacados como Jan Lukasiewicz y Stanislaw Lesniewski quien sería el preceptor y director de tesis de doctorado del famoso lógico Alfred Tarski (1901-1983)[12].

Tarski se convertiría en el tronco de una nueva familia de lógicos y matemáticos centrada en la Universidad de California, Berkeley. Tarski contribuyó a muchas áreas de las matemáticas, entre ellas, topología, geometría, teoría de conjuntos, teoría de medida y fundamentalmente a la lógica, donde, en palabras de Solomon Feferman "construyó un imperio que atrajo estudiantes, y distinguidos investigadores de todas partes del mundo". En efecto, uno de sus distinguidos discípulos fue Rolando Chuaqui, el médico chileno, que cambió su profesión por la lógica matemática y la promoción de las matemáticas en Chile. Tarski revolucionó la lógica, empezando porque fue quien le dio sentido al concepto de verdad y fue además el creador de la teoría de modelos que permitió introducir cosas interesantes en las matemáticas. No hay duda, que entre los grandes lógicos en la historia, junto a Aristóteles, Frege, Russell y Gödel, figurará Tarski.

[12] Una obra interesante sobre la vida y la obra de Tarski es la escrita por su discípulo, el profesor Solomon Feferman y su esposa Anita, *Alfred Tarski. Life and Logic.* Publicada por Cambridge University Press en 2004 con reimpresión en 2005.

DE LAS MATEMÁTICAS POLACAS A LAS UNIVERSIDADES COLOMBIANAS.

“*Para enunciar una buena idea, no se necesita más de cincuenta palabras.* ”S. Ulam



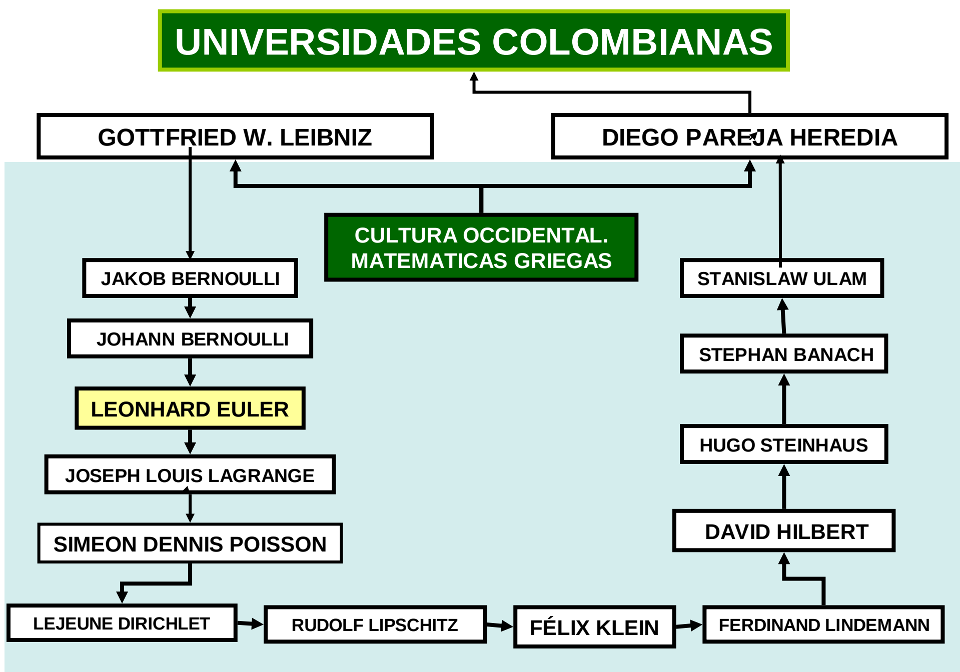
Diapositiva No. 10. Últimos eslabones en dos cadenas que se iniciaron con Leibniz a través de la relación maestro discípulo. Hay muchas más, desde luego, pero estas dos muestran como se han venido transmitiendo las matemáticas desde los tiempos de Euler hasta llegar a nuestros días.

10. De las matemáticas polacas a las universidades colombianas.

Un discípulo destacado que hizo la tesis con Tarski fue el matemático norteamericano Jerome Keisler. Keisler, profesor emérito de la Universidad de Wisconsin, es autor de varias obras de cálculo con enfoque no estándar que sirvieron como texto en universidades norteamericanas por la década de 1980. Su amplia producción en lógica y filosofía lo sitúan como uno de los grandes en las matemáticas contemporáneas. Uno de sus alumnos y luego coautor, fue Sergio Fajardo Valderrama, el hoy alcalde de Medellín. Sergio Fajardo, egresado de la Universidad de los Andes, estudio su doctorado en Wisconsin. En 2002 apareció, *Model Theory of Stochastic Processes*, una obra conjunta de Sergio Fajardo y Jerome Keisler, publicada por A. K. Peters. Es interesante destacar que Keisler tiene ascendencia polaca (su abuelo fue un inmigrante de Polonia) y tal vez por eso su relación con Tarski transcurrió en buenos términos. Desde luego hay que reconocer que Keisler fue, en palabras de Feferman, “entre los estudiantes sobresalientes, el más sobresaliente”. Sergio Fajardo antes de la alcaldía de Medellín se desempeño como profesor de la Universidad de los Andes.

Mi relación con el profesor Stanislaw Ulam se inició en la Universidad de Colorado, cuando fui su alumno en un curso de análisis real. Recién llegado a Boulder, ante la disyuntiva de tomar el curso con Ulam o con Ruth Struik (la hija del famoso historiador Dirk J. Struik), mi colega Víctor Albis, por esa época estudiando para su Ph. D., me dijo: “si quieres aprender análisis, toma el curso con la Struik, si quieres aprender historia de las matemáticas, regístrate con Ulam”. Yo opté por lo segundo y creo que aprendí lo primero y me enamoré de lo segundo. En efecto, las clases del profesor Ulam tenían el atractivo de combinar los temas de análisis con el contexto histórico y hasta sociológico donde estos conceptos aparecían. En muchos casos, como en análisis, topología o teoría de la medida, él, o sus amigos en Polonia habían sido los protagonistas de la creación o la introducción de estos conceptos. Su influencia en mi formación histórica fue más allá del salón de clase, en conversaciones personales, en el cruce de cartas después de terminar mis estudios en Colorado y a través de sus obras, entre artículos y libros que publicó, algunos en coautoría con matemáticos famosos como, Mark Kac o Gian Carlo Rota. Su amistad con John von Neumann, se ve reflejada a lo largo de una de sus obras, *Adventures of a Mathematician*, un libro agradable de leer y que aun se mantiene en imprenta.

A lo largo de estas páginas he tratado de mostrar como las matemáticas y la cultura social inmersa en ellas, se han venido transmitiendo hasta llegar a nuestra generación. Nuestro compromiso debía ser transmitir esta cultura a las generaciones que nos siguen con algún agregado nuevo, en lo metodológico o en lo tocante a la renovación de contenidos. Es preocupante observar que los contenidos matemáticos, en lugar de mejorar, se van degradando al extremo de que lo que enseñamos ahora, es mucho menos de lo que se enseñaba hace cien años. Tenemos que reflexionar en torno a los contenidos matemáticos de la educación y no tomar la posición de convertirnos en banda inerte de transmisión de temas matemáticos, algunos de ellos, inútiles o desactualizados.



Diapositiva No. 11. Diagrama de flujo esquemático, que muestra una cadena originada en la relación profesor alumno, desde Leibniz a Diego Pareja Heredia.

Armenia, Octubre 12 de 2007.

Editado en Armenia, Febrero de 2016.