El Gran Vacío entre la Educación Matemática y el Frente de las Matemáticas

Diego Pareja Heredia. ***Universidad del Quindío***

2000 Mathematics Subject Classification 97D20.

Abstract

The main purpose of this paper is to show how mathematics education has been lagging behind with respect to the front of mathematics and science. We understand by mathematics education here, the mathematical cultural heritage we have been teaching and learning through the past generations from elementary to college mathematical instruction. We will analyze the effect caused on mathematics education by the fast growing of the mathematical knowledge in the past century. We will also try to understand and explain the great separation between math topics we are teaching, and today mathematics and science: mathematics and science on the headlines of the news. We look for new approaches to manage this gap, suggesting radical changes in the curriculum for elementary and high school mathematics.

Felix Klein and Hyman Bass will be mentioned here as milestones figures along the development of mathematical education in the past century. Both of them were ICMI (*International Commission on Mathematical Instruction*) presidents; the former in 1908 and the latter finished his period in 2006.

RESUMEN

El propósito central de esta exposición es mostrar cómo la educación matemática ha quedado rezagada con relación a las matemáticas y a las ciencias en general. Entendemos aquí por educación matemática, el acervo cognitivo, en lo relacionado con las matemáticas, que el hombre adquiere a lo largo de su educación, entre el preescolar y la universidad. Analizaremos el efecto causado por los vertiginosos desarrollos matemáticos en la pasada centuria, en los procesos de enseñanza-aprendizaje en el seno de las instituciones educativas. Se busca desentrañar las causas de la gran separación que existe entre lo que se enseña y lo que se investiga en matemáticas: entre lo que constituye un currículo en la enseñanza básica y lo que debería enseñarse en matemáticas para estrechar la brecha que separa, lo que enseñamos y lo que es noticia en el mundo de las matemáticas.

Los nombres de Félix Klein, el gran matemático de la escuela de Gotinga y un gran educador, y de Hyman Bass, el pasado presidente de la *International Commission on Mathematical Instruction* (ICMI), serán reseñados aquí, como hitos históricos que representan dos épocas: una, la del florecimiento mayor de las matemáticas en Europa, y la época actual, caracterizada por su gran complejidad en lo que a educación se refiere.

1. – Introducción.

¿Cómo podemos probar que e y π son trascendentes?, es una de las preguntas que Felix Klein responde, en un curso de actualización para profesores de colegios de bachillerato de la Asociación para el Avance de la Educación Matemática y de las Ciencias Naturales de Alemania. Estamos hablando de un cursillo que, el “gran Felix Klein”, matemático de talla mundial, dicta a los docentes de educación media en los años de 1890[1]. Esta serie de charlas se realizan en los claustros de la que llegaría a ser la *meca mundial de las matemáticas*, la Universidad de Gotinga. Hay que destacar además que Klein fue un matemático muy comprometido con la educación matemática, faceta no muy conocida, de la vida intelectual del gran matemático alemán.

La trascendencia[2] de π fue establecida por Ferdinand Lindemann en 1882. No hay duda de que este logro fue gigantesco, si se tiene en cuenta que, al determinar la trascendencia de π, queda resuelto negativamente, un problema propuesto desde la antigüedad griega: la *cuadratura del círculo.* Klein, a los pocos años del gran logro de Lindemann, ya está ventilando el tema entre los profesores de educación secundaria. Con esto, quiero poner de presente, que a fines del siglo XIX, los descubrimientos, o los avances de las matemáticas, llegan a los educadores casi al tiempo en que se producen, permitiendo así, su difusión entre sus educandos, y de allí pasen, a formar parte de la cultura social, máximo objetivo que, cualquier sistema educativo persigue.

Mencionemos también que, León Tolstói, en una parte del clásico de la literatura universal, *Guerra y Paz,* escrita a mediados del siglo XIX, propone buscar las leyes que gobiernan la historia de la humanidad, en una teoría basada, nada menos que, en el cálculo integral, una disciplina inventada por Newton y Leibniz en el siglo XVII, y que por ese tiempo está en proceso de desarrollo y consolidación en Alemania y Francia[3]. Sin entrar en detalles técnicos, la idea de Tolstói es usar el recurso de los infinitesimales para interpretar los episodios históricos, y así a través de ellos, llegar a las leyes que gobiernan, el aparentemente caprichoso, comportamiento humano a lo largo de la historia[4]. Aquí, como en el caso de Klein, las matemáticas que se estilan en la época, son las que usa Tolstói para su especulación histórico-literaria.

Lo mencionado en las líneas anteriores, contrasta con la época en que vivimos. No obstante tener la tecnología de punta y los medios de comunicación a nuestro alcance, con las mejores condiciones de vida que el progreso nos depara, los docentes, vivimos desconectados de lo que ocurre en las fronteras de las matemáticas. Si así estamos los docentes, es de esperarse, que el ciudadano común, permanezca en situación de mayor atraso.

¿Cuáles han sido las causas que han propiciado esta separación abismal, entre lo que enseñamos, y lo que ahora es noticia mundial en matemáticas?

---

[1] KLEIN, F. et al. *Famous Problems of Elementary Geometry and other Monographs.* Chelsea Publishing Company. New York. Second Edition. 1980.

[2] Un número real es algebraico si es solución de una ecuación polinómica con coeficientes enteros. Por ejemplo, $\sqrt{2}$ es algebraico, porque es solución de la ecuación $x^2 - 2 = 0$. Sin embargo, π no está en esa categoría. Números como π se llaman trascendentes o no algebraicos.

[3] Ver el interesante artículo: AHEARN, S. T. *Tolstoy's Integration Metaphor from War and Peace*. American Mathematical Monthly. August-September 2005.

[4] Un poco más sobre este tema, se encuentra en: http://www.matematicasyfilosofiaenelaula.info/cronic%20XV.pdf.

¿Qué hacer para cerrar la brecha entre lo que el profesor enseña y aquello que actualmente es motivo de investigación en las matemáticas?

¿Es éste, un problema local, o tiene un carácter universal?

Analizar estas preguntas y reflexionar en torno a ellas, es el objetivo central de este artículo.

Antes de abordar el tema de fondo, digamos algo sobre Felix Klein y sobre Hyman Bass, dos matemáticos de talla mundial, que usamos aquí como hitos históricos para delimitar un período de alrededor de un siglo, en el cual nos ubicamos para hacer algunas consideraciones alrededor de la educación matemática.

Felix Klein (1849-1925) fue un influyente matemático en los círculos intelectuales de fines del siglo XIX y comienzos del siglo pasado, no sólo por ser una de las luminarias de la *Escuela matemática de Gotinga,* sino también, por sus valiosas contribuciones a muchas áreas de las matemáticas, entre ellas a la educación matemática[5]. El *Programa de Erlangen*, por ejemplo, es una muestra de su capacidad universalista, que permitió, usar el álgebra moderna (más específicamente la teoría de grupos) como factor integrador de las diferentes formas de ver, la geometría de su tiempo.

Hyman Bass, es un prestigioso y creativo matemático, hoy en la Universidad de Michigan, quien ha mostrado notable interés por la educación matemática de nuestro tiempo. En su artículo *Mathematics, Mathematicians and Mathematics Education*,[6] nos hace partícipes de sus experiencias en la investigación y en la práctica educativa a nivel elemental, no obstante que, su trayectoria docente e investigativa ha estado relacionada con esferas avanzadas de las matemáticas. Hyman Bass, fue presidente de la *American Mathematical Society*, y también presidente hasta 2006, de la Comisión Internacional de Instrucción Matemática (*International Commission on Mathematical Instruction* (ICMI)). El profesor Bass fue honrado con la National Medal of Science correspondiente al año 2006.

La ICMI se inició por sugerencia de David E. Smith, el historiador americano de las matemáticas, en el Congreso Internacional de Matemáticos celebrado en Roma en 1908. Es interesante anotar que el primer presidente de esta centenaria institución fue precisamente, Felix Klein. Bajo el patronazgo y la organización del ICMI, se celebra cada cuatro años el Congreso Internacional de Educación Matemática, ICME, por su sigla en inglés. ICME-10 se llevó a cabo en Copenhague en 2004 y ya estamos ad portas de ICME-11, en Monterrey, México, Julio 06-13, 2008.

2. Matemáticas y educación matemática.

[5] Felix Klein escribió un libro muy popular en su tiempo: *Matemáticas elementales desde un punto de vista avanzado*, aun en imprenta, publicado hoy, por Dover de Nueva York.
[6] BASS, H. *Mathematics, Mathematicians and Mathematics Education*. Bulletin of the American Mathematical Society. Vol. 42, No. 4. October 2005.

SOBRE EL ORIGEN DE LA PALABRA "MATEMATICAS".

Al estudiar la etimología de la palabra "matemáticas", uno descubre aspectos interesantes que bien vale la pena hacer conocer por cuanto ilustran, la importancia que la enseñanza de las matemáticas tiene y ha tenido a lo largo de la historia, al menos desde la época clásica griega. Jean Etienne Montucla (1725-1799), el primer historiador de las matemáticas en épocas modernas, menciona que uno de los significados de la palabra "matemáticas", era "conocimiento general". Según Bochner[7] el significado original de la palabra griega "matemáticas", fue: "aquello que ha sido aprendido o entendido" o mejor "conocimiento adquirido". Por extensión, se obtiene un significado como: "conocimiento adquirible por aprendizaje".

La palabra griega original es *μαθηματικός*: traducido como: al inglés, *mathematics*, al francés, *mathematiques*, y al español, *matemáticas.* El cambio de nombre: *mathematique* y *matemática*, se da en francés y en español, con la aparición de la Escuela Bourbaki, alrededor de la década de 1930. A esta influyente escuela nos referiremos más adelante.

Lo anterior nos muestra cómo, desde sus orígenes, "*las matemáticas*" son enseñanza y desde luego aprendizaje. De allí que, la educación matemática es connatural a las matemáticas, y consecuentemente, los temas relacionados con la innovación y puesta al día de su enseñanza son esenciales para la supervivencia y enriquecimiento de las matemáticas mismas.

Hay mucha literatura en relación con, *el cómo* enseñar matemáticas a todos los niveles. No ocurre lo mismo, sin embargo, sobre materiales, que resalten y cuestionen, el *qué* se está enseñando en las escuelas, colegios y universidades. La tesis central de este trabajo reposa esencialmente en el cuestionamiento de los **contenidos matemáticos** que se enseñan en los niveles mencionados. Se quiere resaltar además, la urgencia de poner a tono esos contenidos con la época en que vivimos, donde la tecnología se convirtió en parte esencial de la vida diaria. Queremos acentuar la necesidad de poner en un nuevo contexto las matemáticas que enseñamos como parte de un legado cultural que debemos trasmitir a las nuevas generaciones. Estas nuevas generaciones están confrontando realidades muy distintas a aquellas que les tocó vivir a generaciones pretéritas. Para entender las complejidades de las nuevas tecnologías y los intríngulis de la era de la información, necesitamos matemáticas diferentes a las que aprendieron los estudiantes de hace cien, o más años.

Al mirar el contenido del *Texto de Algebra* de Chrystal[8], que sirvió de guía a las escuelas inglesas y americanas de fines del siglo XIX y comienzos del siglo XX, y compararlo con los textos de álgebra actuales, se observa que en la enseñanza del álgebra elemental no ha habido cambios sustanciales. Al contrario, parece que los contenidos vienen degradándose con el tiempo. Posiblemente hoy enseñamos menos álgebra, que la que se enseñaba hace cien años.

Actualmente estamos creando un gran volumen de matemáticas, como puede constatarse en la Web y en las numerosas publicaciones alrededor del mundo. Esta gran cantidad de matemáticas no puede ir directamente al salón de clase, por supuesto, pero, después de cierta decantación,

---

[7] BOCHNER, S. *The Role of Mathematics in the Rise of Science*. Princeton University Press. New Jersey. 1981.

[8] CHRYSTAL, G. *Algebra. An Elementary Text-Book for the Higher Classes of Secondary Schools and for Colleges. Two Volumen.* 7th. Edition. Chelsea. New York. 1964

algunas partes de esta producción matemática, podría ser apropiada para introducirse en la educación básica, o en la universitaria. No hay razones pedagógicas o científicas que impidan la enseñanza en el bachillerato, por ejemplo, de geometría de Riemann o geometrías no euclidianas, después de casi dos siglos de su descubrimiento. ¿Por qué no enseñar el Método Símplex en la educación media, sabiendo que las matemáticas involucradas allí no son de mayor sofisticación? Este práctico método para resolver problemas de programación lineal fue creado por George Dantzig (1914-2006) en 1947. Y un último ejemplo entre los muchos que se quedan sin mencionar, ¿Por qué no hablar de la Conjetura de Poincaré, resuelta por Grigori Perelman hace unos pocos años? Esta famosa conjetura puede ser punto pivotal para motivar e introducir conceptos de áreas fascinantes, como topología diferencial, geometría diferencial y teoría de variedades.

3. – El boom de las matemáticas en la Alemania del siglo XIX.

Muchos matemáticos nos preguntamos ¿por qué, en el mismo país, Alemania, o en torno a la misma herencia cultural y en el siglo XIX, floreció tan granada pléyade de matemáticos, como nos muestra la historia de las matemáticas? No hay respuestas simples desde luego. Sólo encontramos explicaciones de carácter político y social. A comienzos del siglo diecinueve ocurrió una revolución educativa que cambió para siempre la educación en Alemania.

Después de su derrota en las guerras napoleónicas, empezando el siglo XIX, Federico Guillermo III, rey de Prusia, llegó al convencimiento de que el mayor activo sobreviviente de la guerra era la sangre joven; y que para garantizar el futuro de la nación, una prioridad tenía que ser, la implantación en esta juventud, de la mejor educación. Su gran acierto lo constituyó el nombramiento de Guillermo von Humboldt (1767-1835), hermano de Alejandro von Humboldt, como ministro de educación. Guillermo fue un humanista altamente apreciado en los círculos intelectuales de Europa[9]. Ambos hermanos estudiaron en la Universidad de Gotinga. Guillermo fue filósofo, antropólogo y lingüista, mientras que su hermano Alejandro fue reconocido universalmente como naturalista. Guillermo von Humboldt tuvo a cargo la reestructuración del sistema de educación pública. Entre las cosas notables a resaltar en su administración figuran: 1) la creación de un sistema de escuelas normales para la formación de los maestros; 2) la creación de un sistema nacional unificado de escuelas primarias y de bachillerato. 3) la inclusión en el currículo de seis horas de matemáticas por semana para la enseñanza básica.

Esta corriente innovadora en educación alcanzó a llegar a a Colombia a través de una misión pedagógica alemana que nos visitó por los años de 1860, para asesorar al gobierno en la creación de las escuelas normales y que coincidió con la fundación de la Universidad Nacional de Colombia en el gobierno del presidente Manuel Murillo Toro.

[9] Una descripción general de sus contribuciones a la educación teórica y práctica puede leerse en: *WILHELM VON HUMBOLDT (1767-1835)*. Prospects: The Quarterly Review of Comparative Education. Paris, UNESCO: International Bureau of Education, vol. XXIII, no. 3/4, 1993, p. 613–23.

En el tiempo de la administración de von Humboldt se creo la Universidad de Berlín que tanta influencia tendría en el desarrollo de las matemáticas y de las ciencias en general. Su concepción filosófica desde su fundación estuvo basada en el universalismo y la libertad. Su nombre original fue *Friederich Wilhelm Universität*. El siglo pasado se la rebautizó como Universidad von Humboldt, para honrar el nombre de su fundador, quien daría a la universidad alemana los altos estándares que desde ese tiempo la han hecho famosa.

Fue en la Universidad de Berlín donde se acuñó el término "Ph. D.", para designar el más alto título académico en ciencias y humanidades. El término se origina en las palabras latinas *Philosophiae Doctor*, con el significado de Maestro de maestros en filosofía o Profesional letrado en filosofía.

Carl Jacobi, Lejeune Dirichlet, Hermann Grassmann, Ernst Kummer, Karl Weierstrass, están en la lista de los matemáticos de esta nueva era. Estudiantes o bajo la influencia de los anteriores figuran Heine, Kronecker, Riemann, Dedekind, Hankel, Cantor y hay que agregar nombres tan reconocidos y famosos como, Klein, Frege, Lindemann, Hilbert, Hausdorff, Zermelo y muchos más.

La Universidad de Gotinga jugó un papel importante en este proceso de cambio, en razón a sus esfuerzos en la formación de maestros y de investigadores que propiciarían el gran paso hacia un nuevo concepto en el desarrollo de la ciencia y en particular de las matemáticas. Esta tradición se mantuvo viva hasta alcanzar su pináculo en tiempos de Félix Klein, David Hilbert y otros distinguidos matemáticos al comienzo del siglo XX. Las universidades modernas buscan emular el alto nivel y compromiso intelectual que tuvieron las universidades alemanas en el siglo XIX, cuando la corriente de la *ilustración* o *iluminismo* tocó a estas instituciones. La ilustración fue una corriente socio-cultural que se propagó por Europa y culminó en la revolución francesa de 1789.

4 – La separación entre lo que se enseña y lo que se investiga.

El final del siglo XIX y comienzos del siglo XX, fueron épocas de gran dinamismo en la creación matemática. Dinamismo impuesto gracias, sobre todo, a corrientes intelectuales bien definidas, originadas en Alemania, Francia, Gran Bretaña y en parte en la tradición de la escuela matemática rusa, iniciada desde el tiempo en que Euler entronizó la producción matemática en San Petersburgo. Fue tal el avance investigativo por esta época, que consecuencia de ello, hoy podemos apreciar retrospectivamente, la eclosión de muchas áreas nuevas, entre ellas: la topología, el álgebra moderna, el análisis funcional, la teoría de medida, el análisis complejo, la lógica matemática, el análisis en sus ramas abstractas, la teoría de probabilidades y especializaciones de estas áreas que conducen, a nuevas ramificaciones. Finalizando el siglo pasado el número de las ramas más importantes de las matemáticas podían contarse entre sesenta y setenta.

En virtud a este rápido desarrollo, la educación matemática, encasillada en la tradición de los cursos básicos de aritmética, algebra elemental, geometría y cálculo infinitesimal, no pudo asimilar los cambios vertiginosos del desarrollo matemático y se quedó como materia fosilizada, definitivamente atrás. Este rezago es de tal magnitud que, de no cambiar nuestro enfoque en aras de superar este gran vacío, en el futuro será aun más difícil de superar.

Parece que estuviéramos enseñando matemáticas para enfrentar un tipo de problemas científicos y matemáticos del pasado o de culturas diferentes a la nuestra. Los problemas que tienen que encarar las generaciones actuales son diferentes comparados con aquellos del tiempo de Euclides o aquellos cuando apareció el álgebra renacentista o aun más complejos que los problemas que trataron los matemáticos durante la época de la ilustración europea en el siglo XVIII. Con el recurso limitado de la aritmética y del álgebra elementales, con la geometría de Euclides y el cálculo infinitesimal de Newton y Leibniz que enseñamos en el bachillerato, no es posible entender los problemas que se ventilan en nuestro tiempo como la Conjetura de Poincaré que fue noticia en 2006 o el mapeo de E_8, un resultado descollante probado en 2007. Para entender la importancia y consecuencias de estos resultados, lo mínimo que debemos conocer es el lenguaje de la topología y la geometría diferencial en el primer caso y tener unos rudimentos de grupos de Lie en el segundo caso. Áreas como las mencionadas, pueden ser comprensibles al ciudadano corriente si se introducen algunas nociones elementales sobre estos temas en los curricula del bachillerato. Estos temas por exóticos que parezcan, pueden estar al alcance de la comprensión del profesor de bachillerato, siempre que, en las universidades donde se preparen, se cambien los contenidos matemáticos de los programas, y éstos se orienten de forma tal, que, posibiliten el aprendizaje de los mismos. Estos temas, aunque son relativamente nuevos, no dejan de ser fascinantes.

La tesis central de este trabajo tiene que ver con el cambio y actualización de los contenidos matemáticos en la educación básica – elemental y bachillerato – de tal forma que los nuevos estudiantes tengan la oportunidad de entrar en contacto con los temas ya mencionados y con otros muy importantes aunque menos recientes, como la geometría de Riemann, series de Fourier y temas afines. Estos asuntos, entre otros, deben llegar a ser parte de la cultura matemática del futuro ciudadano, si queremos que las matemáticas continúen desempeñando en la educación el importante rol que por más de dos mil años han tenido.

Vastas partes de las matemáticas contemporáneas permanecen desconocidas, para los maestros de matemáticas, para sus estudiantes y también, en muchos casos, para los profesores universitarios. Por ejemplo, importantes y profundos resultados, como los teoremas de *Incompletitud de Gödel*, permanecen sin ser estudiados o comentados en la formación básica de los maestros y así del ciudadano corriente. Pienso que buena parte de la teoría de conjuntos y lógica que actualmente se enseña en los niveles básicos es inútil. Con el conocimiento incipiente de estos temas no se va a lograr unas matemáticas más rigurosas o más consistentes. Desde luego que un curso riguroso de lógica matemática para estudiantes universitarios y futuros docentes no vendría mal, para que estos futuros profesionales entren en contacto con esta importante, y en continuo crecimiento, rama de las matemáticas.

Como hemos visto hay muchas razones que muestran la separación grande, entre lo que aprendemos durante la escolaridad y lo que se produce en matemáticas. En matemáticas hay áreas fundamentales, de las que nunca oímos hablar, ni en el bachillerato, ni en la universidad. Como docentes de matemáticas, es nuestro deber, mostrar al estudiante, el basamento matemático que está detrás, por ejemplo, de la moderna tecnología, o en los alcances de los logros matemáticos de los últimos tiempos. ¿Cómo hacer entender a nuestros discípulos, por ejemplo, las matemáticas que reposan en la base de la grabación digital, o en la encriptación bancaria, o aun en la telefonía celular? Creo que debemos introducir, así sea en forma elemental, la idea de series de Fourier, y hablar de *wavelets*, para poder entender cómo, la técnica actual se fundamenta en unas matemáticas reales, que deben ambientarse en la educación básica.

5 – Para cerrar la brecha.

La educación matemática tiene un peso específico muy importante en la formación cultural del hombre como ser social. Las matemáticas en la cultura occidental han estado ligadas a la educación desde los albores de las primeras civilizaciones: la babilonia y la egipcia. Al repasar la historia de la filosofía y de las matemáticas uno se encuentra que estas dos áreas del conocimiento, han venido aparejadas con la educación. En los primeros tiempos de la cultura griega, la filosofía y las matemáticas eran cultivadas simultáneamente. Filósofos como Zenón, Platón y Aristóteles, para citar solamente tres, contribuyeron al desarrollo de las matemáticas. En tiempos más recientes, Descartes y Leibniz hicieron lo propio desde sus respectivos ángulos. En la actualidad, los matemáticos están contribuyendo al desarrollo de la filosofía, como se aprecia al mirar la galería de galardonados con el *Premio Schock* en Lógica y Filosofía de la Academia Sueca de Ciencias en las últimas entregas. Solomon Feferman y Jaakko Hintikka, premiados en 2003 y 2005 respectivamente, son ambos reconocidos matemáticos[10].

Para cerrar la brecha a la que hemos hecho referencia, necesitamos en primer término, reconocer el problema en su magnitud real y entonces buscar alternativas inteligentes para cambiar y poner al día los contenidos programáticos de la educación básica en lo que respecta a matemáticas, usando el recurso de las nuevas tecnologías para simplificar la enseñanza y la práctica de ciertas rutinas que en el pasado tuvimos que aprender de memoria. La mayor parte de esas rutinas se simplifican con el uso de las calculadoras y del computador. El tiempo que demanda este aprendizaje se puede aprovechar para enseñar un poco más de teoría de números y en buscar formas de aplicar las matemáticas aprendidas a resolver problemas inmediatos (no ideales, ni triviales) que el niño enfrenta de acuerdo a su edad.

Debemos crear nuevos cursos, integrando en ellos lo que sea rescatable de los cursos tradicionales para mantener el legado cultural que las matemáticas vienen trasmitiendo desde sus orígenes. En este proceso podríamos seguir las ideas propuestas por el profesor Bass[11] y sus colegas de la Universidad de Michigan en relación con un *Conocimiento Matemático para la Enseñanz*a (CME). El CME tiene cuatro componentes principales: 1) Conocimiento matemático corriente. 2) Conocimiento matemático especializado. 3) Conocimiento matemático y estudiantes. 4) Conocimiento matemático y docencia. El CME nos permite a los docentes, adecuar contenidos y visión de nuestros cursos, según que estos cursos vayan orientados a la educación básica – supuestamente para formar la cultura matemático del ciudadano corriente – o

[10] Para información relativa a estos premios visitar:
http://www.kva.se/KVA_Root/eng/awards/international/schock/index.asp
[11] Bass, H. *Op. Cit. Pag.* 429.

para la formación del futuro docente. Estos lineamientos nos permiten también organizar materiales para la formación del futuro profesional en ingeniería y ciencias y desde luego para el matemático profesional. En cierta medida cada uno de los cursos programados adecuadamente deberá tener su proporción de las cuatro componentes arriba mencionadas.

En tiempos griegos hubo una distinción clara entre *logística y aritmética*. Logística era el arte de la práctica computacional con números, mientras que aritmética era el estudio de las propiedades y relaciones que ligan a los números. La logística se consideró una disciplina de bajo perfil y así, no estuvo entre las áreas en las cuales los griegos hubieran contribuido mucho. Sin embargo la aritmética, entendida hoy como *teoría de números*, se constituyó en importante y rica disciplina. Los pitagóricos contribuyeron con mucho al desarrollo de la teoría de números a tal punto que los primeros libros de los famosos *Elementos* de Euclides contienen buena porte de las propiedades descubiertas por ellos.

William Thurston, Deborah Ball and Hyman Bass han sugerido hacer una especie de "compresión" de las matemáticas a fin de hacer comprensible a la mente humana el gran volumen de matemáticas que hoy conocemos y que día a día se va creando. Un proceso similar, creo debemos efectuar en la educación con el objeto de que nuestros estudiantes lleguen sin mayor dilación a las fronteras de las matemáticas contemporáneas.

Como se ha dicho en apartados anteriores, el currículo en la educación matemática actual es estrecho y anacrónico. Vivimos una época de cambios radicales, donde la tecnología nos abruma en todos los aspectos, y si no logramos entrar en la tónica de sus grandes posibilidades, estaremos en la situación del que pregunta: *¿Quién se ha llevado mi queso*?[12], al darse cuenta de que las oportunidades se están escapando de sus manos, al no ponerse a tono, con los cambios vertiginosos por los que atraviesa la humanidad.

Para cerrar la brecha necesitamos, de la tecnología de punta y de la toma de conciencia en relación con la magnitud del problema. Creo que debemos revisar los contenidos de las matemáticas básicas, buscando enfoques novedosos que involucren el recurso del computador y de las nuevas tecnologías, buscando la inclusión en el nuevo currículo, de cursos nuevos que involucren posiblemente el conocimiento inmerso en los programas curriculares antiguos pero que permitan visionar unas matemáticas nuevas coherentes con las nuevas tendencias de las matemáticas.

Estamos convencidos que nadie usa tablas de logaritmos, por ejemplo, y por eso, sería superflua la enseñanza de su manejo. También es superfluo e innecesario, yo creo, enseñar, en la forma tradicional la aritmética, cuando tenemos una calculadora al lado. Aún más, ¿quién se pone a hacer las cuentas del pago del mercado, cuando es la registradora, con todo detalle, precisión e impresión a su alcance, la que lo hace? Las registradoras no se equivocan. Los errores serán de otro tipo, pero no de cálculo.

---

[12] JOHNSON, Spencer, MD. *¿Quién se ha llevado mi queso*? *Como adaptarnos a un mundo en constante cambio.* Editorial Urano. Barcelona. 2000.

Entonces, ¿Es necesario enseñar aritmética de rutina, aquella que los clásicos griegos, llamaban *logística*? Creo que no. Aquí hay que hacer una regresión. En este caso, una regresión de más de dos mil años. Considero que debemos retomar la *Aritmética* clásica, la de Pitágoras, Platón, Aristóteles y Euclides, es decir, volver a la *Teoría de Números.* El sentido de la palabra *aritmética*, en sus puros orígenes, era el estudio de los números y sus propiedades. La parte operativa y rutinaria, *la logística*, no tiene mayor interés para el intelecto. Creo que es a la aritmética clásica a la que debemos apuntar. Porque la teoría de números es la que ha enriquecido la historia de las matemáticas y es allí, donde reposa el maravilloso encanto de los números y sus propiedades. Las rutinas aburren, a estudiantes grandes y pequeños, y a lo largo de sus estudios, van formando reacciones adversas, a la comprensión y apego, a las matemáticas en general.

Más interesante que aprender las rutinas podría ser: explicar el porqué de tales rutinas o procedimientos, y aprender la forma de plantear y resolver problemas. Y eso si, es matemáticas, claro, y filosofía también. Los pitagóricos elaboraban tablas de sumar y multiplicar, las que proveían a los comerciantes con las instrucciones para su manejo. Sin embargo, no enseñaban cómo hacerlas. En este conocimiento exclusivo, basaban su poder e influencia. En nuestros días casi siempre hacemos eso, enseñamos los algoritmos, pero no explicamos la razón de su existencia. Conocer la razón de estos algoritmos es más importante y provechoso para el estudiante, que el aprendizaje de las tediosas rutinas. Las propiedades de los números se han venido descubriendo desde los tiempos de Hammurabi en Babilonia. A lo largo de más de dos mil años, matemáticos tan importantes como Aristóteles, Platón, Euclides, Galileo, Fermat, Leibniz, Euler, Gauss, Riemann, y en tiempos inmediatos por Terence Tao, ganador de la Medalla Fields, en el *Congreso Internacional de Matemáticos,* han venido contribuyendo al enriquecimiento de la teoría de números.

6 De lo más elemental a lo avanzado

En la enseñanza elemental deberíamos ensayar nuevas y revolucionarias metodologías para introducir las operaciones aritméticas básicas con el recurso de métodos no convencionales. Un modo de hacerlo es usando la forma más elemental y básica de captar el concepto de cantidad: a través de de los opuestos, *todo* o *nada*, *si* o *no.* Con esta idea en mente, es posible introducir el sistema binario y hacer *aritmética* dentro de él. Más adelante veremos cómo se puede introducir, de forma natural, el sistema binario de numeración.

El niño capta la idea de número desde su más tierna infancia, mucho antes inclusive, que asocie el concepto, a su representación simbólica a través de numerales o de palabras. Después de cierto tiempo, espontáneamente o a través de la lúdica de las rondas y los juegos, descubre la posibilidad de clasificar estos números como *pares* o *impares*. Esta forma de ver los números como números pares o impares, le permite aprender sin ningún esfuerzo, la tabla de multiplicar del dos, no sólo de 1 a 10 si no indefinidamente: 2, 4, 6, 8, 10, 12, … Con un poco de práctica van encontrar el arreglo: 3, 6, 9, 12, 15, 18, 21, 24, 27, 33, 36, …, la tabla generalizada del tres. Continuando en esta forma, el niño construye las tablas de multiplicar para los números, 2, 3, 4, 5, … Al particionar los números en pares, en múltiplos de tres, en múltiplos de cuatro, etc. el logra un acercamiento a las clases residuales inducidas por estas particiones y así llega, sin ningún esfuerzo mental, a manejar la aritmética modular. La aritmética modular es la inducida por las relaciones de congruencia, las mismas que una vez estudió Gauss en sus *Disquisitiones Arithmeticae* de 1801. Al entender {**Z/nZ**} como una partición de los enteros se está abriendo al niño una ventana hacia el álgebra abstracta que se estudiará más adelante. Ejemplos de aritmética modular son frecuentes en las vivencias infantiles al contacto con la lectura del reloj, la escala musical, la medida del tiempo en semanas, etc.

Ahora que el niño tiene la idea de aritmética modular, no será difícil engancharlo en la búsqueda de una representación de los números en forma digital. Recordemos que uno adquiere primero la idea de los números a través del conteo y no precisamente usando su representación simbólica (los numerales). Los numerales no son sino figuras inertes, no los números mismos. Ahora el asunto es cómo representarlos. Como decíamos antes, a los números se puede llegar en la forma más primitiva posible, usando los conceptos de todo o nada, , si o no, lleno o vacío y aun asociando los extremos a la idea de los contrarios – para los niños – cerca o lejos, arriba o abajo, feo o bonito, blanco o negro, gordo o flaco, etc., etc. Estas ideas primitivas son parte de la carga genética con que el cerebro viene dotado y así muy sencillas de entender. Con estas ideas se puede asociar los símbolos "**0**" y "**1**". Para el niño estos símbolos pueden representar, digamos, *vacío* o *lleno*, *nada* o *todo* o si se quiere, las palabras del léxico usual, "**cero**" y "**uno**". De aquí en adelante el proceso de rotular los números con únicamente dos símbolos es como sigue: 0, 1, 10, 11, 100, 101, 110, 111, 1000, 1001, 1010, 1011, 1100, 1101, 1110, 1111,… Si los niños logran captar o fijar el mecanismo que subyace en esta disposición, estamos en posición de introducir el concepto de base para representar o marcar los números como tales.

En el soporte de esta forma de nombrar los números está el número dos. Esto significa que con sólo dos símbolos podemos rotular o representar los números naturales, incluyendo el cero. De aquí en adelante no será difícil introducir el concepto de valor – llamémoslo, nivel o piso – en la secuencia natural de los números. Esto significa, en el caso binario[13] que, 0 y 1 están a nivel del suelo, digamos en el nivel de la calle, mientras que 10 (uno cero, *no diez*) y 11 (uno uno, tampoco *once*) estarán en el primer piso por encima de la calle. En el segundo piso aparecen 100, 101, 110 y 111. Por cada piso hacia arriba el número de representaciones crece. Lo importante de destacar aquí es que este crecimiento no es caprichoso, sino que sigue una regla simple: de un piso al siguiente el número de representaciones que aparece es el doble en comparación con el piso precedente. En otras palabras, en el primer piso aparece la representación de dos números (dos a la primera potencia), en el segundo, cuatro (dos a la segunda potencia) y así sucesivamente.

De aquí en adelante los niños están en condiciones de dar el salto a potencias del tipo 2^n, donde *n* significa el piso o nivel en el cual está el número. Observe que, después de la adición y la multiplicación, la potenciación es la operación algebraica más sencilla.

Al tiempo que estamos mostrando cómo representar los números de la secuencia natural en forma binaria también tenemos la oportunidad de mostrar que estos números se pueden expresar como suma de números tomados del mismo piso más números de pisos inferiores. Por ejemplo 1111 es

---

[13] El sistema binario aparece por primera vez en imprenta en el trabajo de Leibniz *Essay d'une nouvelle science des nombres* en relación con el estudio del clásico del taoismo, el I Ching. Mayor información sobre este tema puede verse en mis notas de Epistemología de las matemáticas (página 90) que aparecen en: http:www.matematicasyfilosofiaenelaula.info

la suma de 1000 (tercer piso), más 100 (segundo piso), más 10 (primer piso), más 1 (nivel de la calle). Es decir: 1111 = 1000 + 100 + 10 + 1.Si logramos convencer a nuestros estudiantes que la aparición de n ceros después de 1 significa 2^n, habremos ganado una gran batalla, puesto que, desde aquí podemos introducir la representación:

$1111 = 1 \times 2^3 + 1 \times 2^2 + 1 \times 2^1 + 1 \times 2^0$.

Donde aparece el polinomio $1 \times x^3 + 1 \times x^2 + 1 \times x^1 + 1 \times x^0$ (cuando $x = 2$).

Aquí "×" significa por ahora, la asociación digital al piso correspondiente. Después de alguna práctica lograremos captar para ellos la idea de polinomio. Entre las entidades algebraicas, los polinomios son los más fáciles de captar por estar constituidos por sumas y productos.

Partiendo de este escenario de aprendizaje, se puede llegar sin mayor dificultad a los algoritmos de suma y multiplicación. Para el caso de la adición de dos números – aquí identificamos el número y su representación – comenzamos con la más simple de todas las tablas para la suma, como es:

+	0	1
0	0	1
1	1	10

Esta tabla solo significa que si deseamos adicionar números del nivel inferior (nivel de la calle) todo lo que necesitamos saber es que 1 + 1 es 10; las otras entradas en la tabla aparecen como obvias. Esto significa que sumar uno más uno es como subir al piso inmediatamente superior. Con esto en mente, la adición no es otra cosa que suma de polinomios. Practiquemos esto con un ejemplo simple. Supongamos que vamos a sumar 1111 + 1010. Usando la representación de 1111 vista arriba y la correspondiente representación de 1010, tenemos:

$$1111 = 1 \times 2^3 + 1 \times 2^2 + 1 \times 2^1 + 1 \times 2^0$$
$$1010 = 1 \times 2^3 + 0 \times 2^2 + 1 \times 2^1 + 0 \times 2^0$$

Encontramos:

$$1111 + 1010 = (1 \times 2^3 + 1 \times 2^2 + 1 \times 2^1 + 1 \times 2^0) + (1 \times 2^3 + 0 \times 2^2 + 1 \times 2^1 + 0 \times 2^0).$$

Por supuesto tendríamos que decir algo sobre el uso de paréntesis y la libertad que tenemos para mover y agrupar partes de las representaciones de tal forma que elementos de pisos iguales estén juntos. La suma entonces puede arreglarse así:

$$1111 + 1010 = (1 \times 2^3 + 1 \times 2^3) + (1 \times 2^2 + 0 \times 2^2) + (1 \times 2^1 + 1 \times 2^1) + (1 \times 2^0 + 0 \times 2^0).$$

En este punto del proceso, podemos ver cuatro adiciones de números homogéneos (cada par en el mismo piso). Podemos ahora usar la tabla de adición mostrada arriba, para efectuar $1 + 1 = 10$, $1 + 0 = 1$; $1 + 1 = 10$, $1 + 0 = 1$ y así obtener:

$1111 + 1010 = (10 \times 2^3) + (1 \times 2^2) + (10 \times 2^1) + (1 \times 2^0)$

El significado de 10×2^3, según la regla del salto al piso superior es 1×2^4, y en el tercer piso queda cero. También $10 \times 2^1 = 1 \times 2^2$ y queda cero en el primer piso. Cambiando los valores arriba queda:

$1111 + 1010 = (1 \times 2^4) + (0 \times 2^3) + (1 \times 2^2) + (1 \times 2^2) + (0 \times 2^1) + (1 \times 2^0) = (1 \times 2^4) + (0 \times 2^3) + (1\ 0 \times 2^2) + (0 \times 2^1) + (1 \times 2^0) = (1 \times 2^4) + (0 \times 2^3) + (10 \times 2^2) + (0 \times 2^1) + (1 \times 2^0)$

Repitiendo el uso de la regla del salto al piso superior, $10 \times 2^2 = 1 \times 2^3 + 0 \times 2^2$. Con estos cambios encontramos

$$1111 + 1010 = 1 \times 2^4 + 1 \times 2^3 + 0 \times 2^2 + 0 \times 2^1 + 1 \times 2^0 = 11001.$$

La pregunta ahora es ¿qué hay de novedoso o notable en la argumentación anterior? Lo importante aquí es que estamos dando fundamentación a un algoritmo como:

$$\begin{array}{r} 1111 \\ +1010 \\ \hline 11001 \end{array}$$

Se sigue que en este caso estamos haciendo más aritmética (matemáticas) que logística. Además estamos dando una razón que justifica el algoritmo de la suma; a diferencia del método tradicional que fuerza al estudiante a memorizar los procedimientos aritméticos, sin ninguna razón que los justifique.

Este proceso puede repetirse con 3, 4, 5, etc. Al llegar a 10, estamos en la aritmética de Al-Khwarizmi que se ha venido enseñando desde la edad media.

Entonces aparece la pregunta, ¿Por qué, siendo lo anterior tan sencillo y de fácil comprensión no se enseña en la escuela? Pienso que una respuesta podría ser: por el poder de la “tradición”. Porque no fue así, como nos enseñaron las matemáticas a nosotros, ni a nuestros padres ni abuelos; por la misma razón además, que estamos enseñando geometría de Euclides y no una geometría realista como lo es la de Riemann.

La anterior digresión aritmética tiene por objeto mostrar una pequeña parcela del terreno curricular matemático que podría incluirse en la educación primaria. Como puede notarse en esta corta nota, la introducción de los numerales nos da pie para anticipar conceptos importantes de las matemáticas, tales como: base numérica, clases residuales, polinomios, dominios de integridad y anillos. Y más importante que todo, llevar las matemáticas de uso corriente en la tecnología, al aula de clase, por cuanto que al introducir el sistema binario estamos acercándonos no sólo al lenguaje con el que trabaja el computador, si no también a aspectos de las matemáticas aplicadas a la teoría de la información y la comunicación, al álgebra de Boole, a la transformada de Haar que motiva la teoría de las *wavelets*, a distribuciones básicas en la teoría de las probabilidades como es la distribución Bernoulli y más allá aun, a *Polinomios ortogonales*, como los polinomios de Bernstein, y por qué no, a introducir el concepto de jerarquía en la teoría de tipos de Russell y de la lógica moderna.

7 – Una mirada panorámica a la educación matemática global.

La Escuela Bourbaki y su influencia en la educación matemática. Quiero referirme aquí sólo superficialmente a los casos de Europa, Estados Unidos y Colombia, por ser los que medianamente conozco. En cuanto a Europa me referiré a la escuela Bourbaki que dejo varias secuelas en las matemáticas que hoy tratamos, empezando por el cambio de nombre. Mientras clásicamente se hablaba genéricamente de las matemáticas, después del ascenso de la Escuela Bourbaki terminamos diciendo "*la matemática*". Este término pasó a nuestro lenguaje con un comportamiento un poco extraño, por cuanto con frecuencia el mismo autor usa las dos palabras indistintamente, sin detenerse a pensar que las dos tienen pesos específicos muy diferentes, por cuanto detrás de los dos términos hay dos filosofías también diferentes.

El vacío entre lo que enseñamos y lo que está en el frente de la ciencia, no es nada nuevo. Desde los años treintas del siglo pasado la Escuela Bourbaki, buscaba en su enfoque filosófico remediar precisamente ese mal. André Weil describe en sus memorias[14], cómo, su preocupación al respecto, fue compartida por sus colegas, Henri Cartan, Jean Dieudonné, Charles Pisot, Claude Chevalley y Jean Delsarte, todos egresados de la Escuela Normal Superior de Paris. Este grupo de profesores franceses, se vendría a constituir en el núcleo inicial de la muy reconocida *Escuela Bourbaki*, que tendría cuestionada influencia en la educación matemática de occidente.

La idea inicial del grupo estaba orientada a reescribir los textos de matemáticas para el nivel universitario que permitieran dar las bases para el gran salto hacia unas matemáticas básicas que estuvieran a tono con los grandes avances de las nuevas matemáticas desarrolladas hasta esa época. Se buscaba incluir en el pensum universitario la teoría de conjuntos, en parte axiomatizada por ellos y por Ernst Zermelo y Fraenkel, como también unos fundamentos básicos que permitieran la introducción del núcleo central de las matemáticas modernas. Obras de análisis matemático como la de Edouard Goursat, apropiadas para los estudiantes universitarios de fines del siglo XIX, requerían ser reemplazadas por textos de mayor alcance y profundidad, que permitieran dar cabida a las nuevas tendencias que incluían: topología, teoría de medida, algebra, espacios topológicos y temas no estudiados en los textos en circulación por esos años.

Vale la pena anotar aquí, la inquietud de la escuela Bourbaki por introducir a nivel básico y avanzado el cálculo vectorial que desde mediados del siglo XIX, Hermann Grassman había introducido, con muy poca receptividad en los círculos matemáticos de esa época. Grassman se anticipó a su tiempo. Sólo hasta la aparición de los espacios de Hilbert a comienzos del siglo XX,

[14] WEIL, A. *The Apprenticeship of a Mathematician*. Birkhäuser Verlag. Basel-Boston-Berlin. 1991.

el análisis vectorial tuvo completa acogida. Una historia interesante sobre este tema la cuenta Greg McColm en su artículo *A Metaphor for Mathematics Education*[15] .

La Escuela Bourbaki buscaba además de la presentación de materiales nuevos en el pensum, un pretendido rigor desde las esferas más elementales de las matemáticas. Este rigor en la presentación de los temas, fue una característica central de su enfoque. Los conceptos de, estructura y de homomorfismo, entraron a formar parte del argot de las matemáticas desde que empezaron a circular los volúmenes de los *Elementos de Matemática* de Bourbaki. No hay duda que la influencia de la Escuela Bourbaki fue muy sentida en el mundo de la educación matemática, a tal punto que la aparición del movimiento de la *matemática moderna*, despertó reacciones encontradas en todas las esferas relacionadas con la educación matemática, como lo veremos más adelante.

La Nueva Matemática en Estados Unidos y en Colombia. Al igual que a Colombia, la *matemática moderna,* tocó a Estados Unidos con consecuencias un tanto polémicas. Esta corriente, tuvo en la escuela francesa Bourbaki, su modelo a seguir, y su aclimatación en la "Nueva Matemática" de Estados Unidos, la lideró el *SMSG* (School Mathematics Study Group). En Colombia recibimos *la matemática moderna* directamente de Francia y también a través de los llamados *cuerpos de paz*, en tiempos de la administración de John F. Kennedy. El efecto de estas tendencias, sin ser catastrófico, como fue en Estados Unidos, no nos dejó mayor cosa, ni para bien ni para mal, creo, salvo por un detalle, un cambio de denominación: antes decíamos *matemáticas,* ahora muchos dicen: *matemática*.

La singularización del término *matemáticas*, por la escuela Bourbaki, fue intencional, pues su concepción filosófica implicaba la creación de un solo cuerpo sólido de conocimiento matemático, basado en la teoría de conjuntos. Es decir, una sola disciplina, *la matemática*, cuyo contenido aparecería en la obra proyectada, *Elementos de Matemática*.[16]

La llegada de la *matemática moderna* a Colombia, coincidió con un incremento masivo de la educación media y universitaria. Particularmente las facultades de educación se multiplicaron a tal punto que hasta las universidades privadas incluyeron en su oferta académica, la carrera de ciencias de la educación con especialidad en matemáticas. Con esta explosión de licenciados en matemáticas, la *matemática moderna* entró a todos los rincones del país y claro, allí nos quedamos, como puede constatarse en los textos de matemáticas que estudian nuestros estudiantes de bachillerato.

La llamada matemática moderna trajo como principal elemento el método axiomático, dentro de un marco formalista, el que se trató de imponer desde los primeros años de escolaridad, con consecuencias catastróficas en el ámbito educativo de Estados Unidos; a tal punto que por los años setentas del siglo pasado apareció un movimiento de retorno a lo básico de las matemáticas y un ataque a la metodología de la enseñanza de las matemáticas y a sus correspondientes

---

[15] McColm, G. *A Metaphor for Mathematics Education*. Notices of the American Mathematical Society. Vol. 54. No. 4. April 2007.

[16] BOREL, A. *Twenty Five Years with Nicolas Bourbaki, 1943-1973.* Notices of the American Mathematical Society. Vol. 45, No. 3. Pág. 374. March 1998.

curricula. Matemáticos importantes, como Morris Kline de la Universidad de Nueva York criticaron duramente la implementación de la nueva matemática en las escuelas y colegios de Norte América a través de sus libros[17] y de entrevistas en la radio y la televisión. Este movimiento condujo a la enseñanza de las matemáticas a una degradación, cuya consecuencia fue una nueva reacción, en este caso, no de los matemáticos profesionales, sino del *National Council of Teachers of Mathematics*, la organización que agrupa a los profesores de matemáticas de la enseñanza básica. Esto ocurre en los años de 1980, con la aparición de unos principios y estándares mínimos para la educación matemática, los que marcan un hito en la historia de la educación en ese país, donde la educación ha tenido autonomía local para establecer los curricula de enseñanza.[18]

8 – Sobre los contenidos programáticos en la educación matemática.

Mencionábamos en la introducción que hay una brecha grande entre lo que enseñamos y lo que está en la frontera del conocimiento matemático. Esto es particularmente visible en los últimos años, cuando los mismos profesores universitarios, no están en capacidad de dar cuenta de los logros de las matemáticas en tiempos recientes. Hace muy poco (exactamente el 19 de Marzo de 2007) se logró mapear un álgebra de Lie de características muy importantes. Una ronda de entrevistas con mis colegas me mostró, un total desconocimiento de lo que son los grupos y las algebras de Lie. Ni siquiera habían oído el nombre de Lie. Me atrevo a creer que la gran mayoría de mis colegas en Colombia están en condiciones parecidas. En 2006 Grigori Perelman rechazó la Medalla Fields que se le ofreció en el Congreso Internacional de Matemáticos, celebrado en Madrid, por su contribución a la solución positiva de la Conjetura de Poincaré. Dada la importancia de esta conjetura tanto en matemáticas como en física, el tema ha sido noticia en los grandes periódicos del mundo. La importancia de la conjetura de Poincaré puede apreciarse mejor cuando uno descubre que seis Medallas Fields se han entregado a matemáticos, que han contribuido a la solución de este problema en los últimos cuarenta años. Entre estos medallistas están: John Milnor, Steve Smale y Charles Feferman[19]. Muy pocos colegas conocen de que trata la conjetura, y menos aun, las implicaciones que la misma conlleva para la ciencia.

Desde 1936 se vienen otorgando las medallas Fields por contribuciones sobresalientes a las matemáticas y las noticias de cada cuatro años en matemáticas tienen que ver precisamente con el nombre de los ganadores y las áreas de las matemáticas en la que trabajan los galardonados. Mirando un poco las estadísticas, los premiados están en campos como geometría algebraica y diferencial, teoría algebraica y analítica de números, ecuaciones diferenciales parciales, análisis matemático, topología y lógica matemática. Estas áreas son prácticamente desconocidas para el

---

[17] Ver por ejemplo:
KLINE, M. *Why Johnny Can't Add: The Failure of the New Math.* Random House Inc. New York. 1974.
KLINE, M. *Why the professor can't teach: Mathematics and the dilemma of university education.* St. Martin's Press. New York. 1977.

[18] NCTM. *Principles and Standards for School Mathematics*. Ver:
http://standards.nctm.org/document/chapter2/index.htm

[19] Ver por ejemplo, la exposición de John Morgan en el ICM, Madrid 2006, en :
SANZ-SOLÉ, M. et al, Ed. ICM, Madrid 2006. Vol. I. *Plenary Lectures and Ceremonies.* European Mathematical Society.

profesor de bachillerato y pocos profesores de matemáticas en la universidad, están familiarizados con ellas.

Ahora, si nuestro universo lo ampliamos a la educación elemental y al ciudadano corriente, el panorama es aun más desalentador. Lo mencionado arriba, no es nada nuevo, ni una característica de los docentes de matemáticas colombianos, parece ser que este desfase, lo traemos los docentes de muchos países incluyendo aquellos llamados desarrollados. ¿Por qué, lo que enseñamos, inclusive en los cursos universitarios está tan alejado de las fronteras de la investigación matemática y sus aplicaciones? Una razón es que los contenidos programáticos de la educación básica (elemental y media) y también de la educación universitaria en ciertos aspectos, no han tenido variación substancial en los últimos cien años. Seguimos con la aritmética, la geometría euclidiana, el álgebra y el cálculo casi en estado fósil. Continuamos reciclando los mismos temas, a veces con los mismos libros. Véase el caso, por ejemplo, del Algebra de Baldor, después de más de setenta años sigue firme, como el mayor libro de matemáticas que se atesora en muchos hogares colombianos. Caso parecido ocurre con los cursos de cálculo en la universidad. Cambiamos el cálculo de Granville, por el cálculo de otros autores, como Thomas, Apostol, Leithold, etc., pero los contenidos no han sufrido mayores modificaciones. Más rigor si, más conjuntitis y demostraciones, pero, no hemos dado un paso adelante en el conocimiento de cosas nuevas.

Mientras este estatismo ocurre en la enseñanza, el conocimiento matemático, se desarrolla a pasos agigantados en sus respectivos frentes, dando origen a una brecha de tamaño descomunal con respecto a la primera, muy difícil de llenar, si no se toman correctivos a tiempo.

Para determinar un diagnóstico que nos acerque a la realidad de la educación matemática, necesitaremos un estudio juicioso de lo que está ocurriendo al interior de ella, y quienes están llamadas a hacerlo, son, en primera instancia, las instituciones universitarias con facultades de educación, y desde luego, con el apoyo, iniciativa y asesoría del ministerio de educación. El espacio de esta nota no me permite entrar en detalle a este respecto. Sin embargo, quisiera señalar ciertos síntomas preocupantes, que acusa la educación en general. Estos síntomas, según mi criterio, tienen que ver con dos aspectos. El primero, del que hemos venido hablando, está relacionado con los contenidos programáticos y el segundo, tiene que ver con la deficiente formación de los docentes de la educación básica y universitaria. Un sitio especial en esto último ocupa la educación matemática que se imparte en las facultades de educación. Este último tema da para escribir otro artículo de dimensiones similares al presente.

9. – Algunas recomendaciones.

Desde la orilla de mi experiencia universitaria, sin ser un especialista en educación matemática, me atrevería a sugerir o recomendar la discusión, en principio, del tema de los contenidos curriculares para las facultades de educación. Entiendo que cambiar un proceso educativo en forma global se ve muy difícil. No obstante, la complejidad de la problemática educativa, me atrevería a hacer algunas recomendaciones generales. El eje central de todo cambio deber ser una filosofía que tenga en su núcleo una educación libre, universalista y humanista. Algunos puntos específicos a tenerse en cuenta serían los siguientes.

a) Empezar el cambio haciendo reingeniería en las facultades de educación que tienen que ver con la formación de maestros para la educación básica. Debemos entender que hay realmente dos tipos fundamentales de educación matemática. La primera tiene que ver con el bagaje cultural que conlleva históricamente, el estudio de las matemáticas, en relación con el entendimiento matemático conceptual o más específicamente, como lo llama Keith Devlin[20], el *entendimiento funcional del concepto matemático*. La segunda forma de ver la educación matemática está relacionada con el aprendizaje de técnicas y rutinas operativas como es, el manejo eficiente de las operaciones aritméticas, algebraicas y rutinas del cálculo infinitesimal y sus correspondientes aplicaciones. Para el maestro es más importante la primera; mientras que para el futuro ingeniero prevalece la segunda.

b) Mayor impulso a la educación avanzada, tanto en doctorados como postdoctorados.

c) Mayor compromiso de la universidad para elevar su nivel académico buscando llenar vacantes profesorales con los más capaces abriendo la posibilidad de que profesores extranjeros de alta calidad se integren al desarrollo educacional del país.

d) Creación de institutos de alto nivel, donde se formen los profesores universitarios del futuro.

e) Enseñar aritmética en el sentido clásico, o sea, teoría de números, y ésta integrada al álgebra desde la escuela elemental.

f) Enseñar algebra abstracta en lugar del algebra tradicional en bachillerato y en la formación de maestros.

g) Enseñar análisis matemático en lugar de cálculo infinitesimal en la formación de maestros.

h) Introducir en el bachillerato y en la formación de docentes las geometrías no euclidianas, de Riemann y diferencial.

i) Incluir en la formación del docente al menos un curso de lógica matemática moderna.

j) Crear o mantener la cátedra de epistemología de las matemáticas como elemento integrador de toda la educación matemática. Con ello se busca poner en el mismo contexto: matemáticas, lógica, filosofía y ciencias humanas.

k) Que la formación del maestro incluya educación bilingüe, científica y humanista. Promover la creación de licenciaturas en ciencias, área mayor: matemáticas, física, química o biología.

[20] Ver por ejemplo las columnas de Devlin en: http//www.maa.org.

Lo anterior es una compilación de algunos temas tratados en charlas expuestas en la Universidad del Quindío, en el Congreso Nacional de Matemáticas en Medellín y en el Simposio de Matemáticas de la Universidad Industrial de Santander durante el año 2007.