

MARTIN GARDNER, ALICIA Y LA LEY DE LA GRAVEDAD

Diego Pareja Heredia, *Universidad del Quindío*
 Jairo Urrea Henao, *Universidad del Quindío*

Resumen

El objetivo principal de este artículo es proponer un nuevo enfoque que integre literatura, filosofía y matemáticas para facilitar y motivar la introducción de determinados conceptos, en particular, de las matemáticas o la física, como es el caso de la ley de la gravedad.

Alicia en el País de las Maravillas es un cuento universalmente conocido, que permite a manera de motivación, presentar en forma amena conceptos fundamentales de la ciencia, que generalmente se introducen a través del método formal.

Aquí empezamos con la caída de Alicia en un pozo profundo a lo largo del centro de la tierra, para explicar el comportamiento de la gravedad según el modelo que se escoja para describir la estructura interna de nuestro planeta. Mencionamos, entre otras, algunas descripciones del interior de la tierra, tales como el mitológico Hades, el Infierno de Dante, las fantasías de Julio Verne y la novela *Pellucidar* de Edgar Rice Burroughs.

El propósito es mostrar cómo la velocidad y el tiempo al llegar al centro de la tierra, varían según el modelo que sirve de referencia. En particular los valores encontrados difieren de aquellos que Martin Gardner exhibe en su libro *The Annotated Alice*.

Abstract

The main purpose of this paper is to show a new approach to present some mathematical and physical concepts into the classroom, combining literature, philosophy and mathematics.

The Lewis Carroll's *Alice's Adventures in Wonderland* is a worldwide known story, which is suitable to motivate the introduction of many fundamental scientific concepts, in such a way that students would learn them, easier than when they are introduced through a formal way. Here we start with Alice falling through a hole all the way down inside the earth's center to explain the behavior of gravity according the model for internal structure of the earth we use. We mention some literature descriptions for the earth's interior, such as mythological Hades, Dante's Hell, Jules Verne novel and Edgar Rice Burroughs' country called Pellucidar.

Our aim is to show how velocity and time change at reaching earth's center, when we change models; in particular we exhibit values which differ from those, Martin Gardner finds out in his *The Annotated Alice*.

1. INTRODUCCIÓN.

A los cursos de filosofía y literatura que dirige uno de los autores (Urrea), en ocasiones, se invita profesores de otras disciplinas llamadas “duras”, como la física o las matemáticas, a que participen en la discusión y análisis de temas que literatos o filósofos debaten, relacionados con estas disciplinas específicas. El lector de las *Alicias*¹ de Lewis Carroll, descubre desde las primeras páginas de estas obras que, el autor incursiona en varios campos, algunos muy distantes de la literatura. Esta es una de las razones por la cual los autores de este trabajo inician, a través de esta propuesta interdisciplinaria, una actividad que coadyuve a una mejor comprensión de temas que, en muchas ocasiones convergen hacia la literatura, la filosofía o las matemáticas.

Las versiones en español de las dos *Alicias* de Jaime de Ojeda, se consideran como las mejores, entre las conocidas. Ojeda, además de recrear en lenguaje español, los juegos que propone Carroll, trae una serie de notas que ponen al lector a tono con el contexto histórico y social en que vivió Carroll durante la era victoriana en Inglaterra. Dice, por ejemplo, en el prólogo a *Alicia en el país de las maravillas*²: “Un segundo elemento lúdico se añade a lo puramente lingüístico: es el de la lógica matemática. Carroll era un gran matemático; era ésta su profesión”...y más adelante: “La enorme habilidad matemática de Carroll se despliega por *Alicia en el país de las maravillas*, y más aún en *Alicia a través del Espejo*, donde llega al paroxismo”. Al final del prólogo, el propio Ojeda recomienda para seguir tales inquietudes matemáticas, la lectura del libro de Martin Gardner: *The Annotated Alice*³. Esta obra de Gardner hace un seguimiento detallado de las dos *Alicias* y de un capítulo inédito de *A través del Espejo*, traducido como *La avispa en la peluca*, a través de comentarios glosados, sobre todo, en relación con inquietudes científicas: en lógica, matemáticas, física y astronomía, que reflejan estas obras.

Dado que la comprensión del libro no es fácil para el lector corriente, es útil y aconsejable compartir su lectura con profesionales en este tipo de temas. Esta es la razón para que el aporte de carácter matemático esté a cargo de uno de los autores (Pareja). Elegimos la nota 2 que aparece en (3), como punto de partida de estos trabajos conjuntos, que generen inquietudes y despierten, así lo esperamos, polémica y discusión que lleve a nuevos enfoques de la enseñanza de las ciencias, la literatura y la filosofía en las universidades colombianas.

Se pregunta Lewis Carroll, en boca de Alicia, sobre la posibilidad de construir un hueco que atravesie la tierra pasando por su centro, y que si alguien cae en él, ¿saldría al otro lado, con los pies para arriba, o si los que están exactamente debajo de Alicia, están abajo o arriba? Antes de entrar en el problema de la caída libre a lo largo del imaginario túnel, se hace primero la presentación de Lewis Carroll y Martin Gardner, dos de los tres protagonistas en este trabajo.

¹ Con *Las Alicia*s nos referimos a las obras citadas en la nota 2.

² Carroll, Lewis. *Aventuras de Alicia en el País de las Maravillas*, Alianza Editorial. Madrid. 1974. Trd. Jaime de Ojeda.
- *Alicia a través del Espejo*. Alianza Editorial. Madrid. 1978. Trd. Jaime de Ojeda.

³ Gardner, Martin. *The Annotated Alice. The Definitive Edition*. W. W. Norton & Company. New York. 2000.



Lewis Carroll (1832 - 1898)*

2. Presentación de Lewis Carroll

En realidad Lewis Carroll es el seudónimo que usó para firmar sus obras literarias y juegos lógicos el reverendo diácono Charles Lutwidge Dodgson, quien nació en Inglaterra el 27 de enero de 1832 en Daresbury, Cheshire, y murió el 14 de enero de 1898 en Oxford. Para apreciar la belleza de Daresbury, invitamos al lector visitar www.lewis-carroll-birthplace.org.uk. En su niñez Dodgson demostró una notable precocidad literaria: creaba títeres para hacer representaciones a su familia (afición por el teatro que mantuvo siempre). Producía pequeñas revistas que ilustraba él mismo (recordemos que los manuscritos de sus obras, entre ellas las dos Alices, fueron ilustradas con sus propios dibujos, luego perfeccionados por los dibujantes John Tanniel, Peter Newell y Harry Furniss).

Fue inicialmente un estudiante de matemáticas y luego profesor de las mismas por más de veinticinco años, en instituciones de Oxford. Fundamentalmente se dedicó a la enseñanza de la lógica y propuso interesantes paradojas que conducen, a lo que hoy llamamos metalógica. Escribió algunos textos como: *El juego de la lógica*, *La lógica simbólica parte I*, *Una paradoja lógica*, *Lo que le dijo la tortuga a Aquiles*, *Euclides y sus modernos rivales*, *Fórmulas de geometría plana*, *Tratado elemental de los determinantes* y *El libro V de Euclides*, entre otros. Este último enfocado algebraicamente en cuanto hace relación a magnitudes incommensurables (tema que trataremos en *Filosofía y Matemáticas en el Aula. La filosofía y el descubrimiento de los irracionales*).

Sus inquietudes artísticas nunca lo abandonaron. Fue además pionero de la fotografía. Uno de sus tíos, quien era tan curioso e inquieto como el propio Charles Dodgson, colecciónaba artefactos tales como: telescopios, microscopios, y toda clase de innovaciones, entre ellas, la máquina fotográfica que apenas se acababa de inventar. En 1855 pasó unas vacaciones en casa de los Dodgson, y allí nuestro héroe se familiarizó con la fotografía. Para el joven Charles Dodgson fue algo más que una

sorpresa ¡fue una revelación! Su tío manipulaba una caja mágica que detenía las imágenes en el tiempo, con sólo obturar una lente. Una semana más tarde estaba redactando un artículo titulado: "Las maravillas de la fotografía". Un año después encargó a su tío un equipo completo, incluyendo un cuarto oscuro y portátil. Charles Dodgson tiene en ese entonces 24 años, la fotografía 17, y el sistema colodión (revelado) apenas 5 años. Entre 1856 y 1880, erigió una importante galería de retratos de obispos, arzobispos, profesores de Oxford, artistas, escritores, actores y actrices; también hizo fotos de niñas, en ocasiones desnudas y en otros casos con disfraces. En su laboratorio fotográfico parecía un alquimista, un mago, según nos cuenta Jean Gattégno⁴, uno de sus biógrafos y traductor de Carroll del inglés al francés.

En literatura revolucionó el género narrativo *nonsense* (del absurdo) de la tradición inglesa, aquel de novelas y aventuras iniciado, entre otros, por Daniel Defoe (1660-1732) y por Henry Fielding (1707-1754), convirtiéndolo, en juegos y acertijos lógicos para poner a pensar a los lectores. Pero fundamentalmente se preocupó por la comunicación, en el sentido de las dificultades que se presentan, cuando conversamos o tratamos de transmitir ideas y pensamientos. Tal vez, hemos tenido noticias, sólo de sus obras, *Alicia en el país de las maravillas* y *Alicia a través del espejo*, las más conocidas. Sin embargo, también escribió *Silvia y Bruno*⁵, *A la caza del Snark*,⁶ y una cantidad de juegos lógicos de factura literaria; cuentos, que plantean una o más cuestiones matemáticas – de aritmética, álgebra o geometría - compilados en varios libros, uno de ellos: *Matemática demente*,⁷ traducido y editado por Leopoldo Panero, uno de los iniciadores del surrealismo y quien además tradujo al español *A la caza del Snark*. Recordemos que el movimiento Surrealista en cabeza de André Breton, declaró que sus maestros fueron Sigmund Freud y Lewis Carroll.

Ahora hablaremos de las Alicias, pues es sobre estas dos obras que se ha centrado la mirada de muchos pensadores contemporáneos. Sólo mencionaremos algunos de estos: Martín Gardner, escritor norteamericano, de quien se hablará más adelante, escribió una obra de astro-física denominada *Izquierda y Derecha en el Cosmos*⁸, basada en las reflexiones de Carroll en *Alicia a través del espejo*, sobre la imagen que nos devuelve el espejo; y en su libro: *Máquinas y diagramas lógicos*⁹, presenta a Carroll como uno de los pioneros de las máquinas computadoras.

Alfonso Reyes, escritor mexicano, en su libro *La Experiencia Literaria*, estudia los tipos de *Jitanjáforas*, término inventado por él en 1929, para designar palabras o frases sin sentido pero con sonido melódico y rítmico - palabras valija o palabras maletín con mucha música. En esta obra, se nos señala el gran aporte de Lewis Carroll en estos juegos con el lenguaje. Los juegos del lenguaje de Lewis Carroll, que insisten en el disparate racional, los clasificaría Alfonso Reyes como *Jitanjáforas del letrado*.

Alfredo Deaño, teórico de la lógica, publica un libro con el título *El juego de la lógica y otros escritos*,¹⁰ tomado de los acertijos lógico-matemáticos que hizo Carroll.

⁴ Gattégno, Jean. *Lewis Carroll*. Fondo de Cultura Económica. México. 1991. Trd. Federico Navarrete Linares.

⁵ Carroll, Lewis. *Silvia y Bruno*. Ediciones Felmar. Madrid. 1976. Trd. José Martín Arancibia.

⁶ Carroll, Lewis. *A la caza del Snark*. Ediciones Libertarias. Madrid. 1982. Trd. Leopoldo María Panero.

⁷ Carroll, Lewis. *Matemática Demente*. Tusquets Editores. Barcelona. 1980. Trd. Leopoldo María Panero.

⁸ Gardner. Martin. *Izquierda y Derecha en el Cosmos*.

⁹ Gardner, Martin. *Máquinas y Diagramas Lógicos*. Alianza Editorial. Madrid. 1985. Trd. Luís Bou.

¹⁰ Carroll, Lewis. *El juego de la Lógica y otros Escritos*. Alianza Editorial. Madrid. 1980. Trd. Alfredo Deaño.

Gilles Deleuze, filósofo francés, escribe *La lógica del sentido*,¹¹ basado en las reflexiones de Carroll sobre el sin-sentido.

Raymond Smullyan, lógico matemático, escribió un libro denominado *Alicia en el país de las adivinanzas*,¹² en el cual toma los acertijos planteados en las Alicia y los multiplica.

Carl Sagan en su libro *Cosmos*, en el capítulo IX: La vida de las estrellas, toma un pasaje de *Alicia en el país de las maravillas*, correspondiente al capítulo 7, *Una merienda loca*, donde se encuentran Alicia, el Sombrerero loco, la Liebre de marzo, el Lirón y el Gato de *Cheshire*. Los primeros cuatro toman el té, Sagan, siguiendo la tradición de Carroll, Gardner, de Stephen Hawking, e incluso la del propio Einstein (quienes usan casos anormales de gravedad para explicar, cómo funciona normalmente la gravedad), más precisamente tomando la gravedad $g = 1$ para el caso normal y $g = 0$ en casos anormales.

El psicólogo John Skinner, escribe un ensayo sobre Dodgson denominado “Lewis Carroll en el país de las maravillas”, donde nos plantea la teoría que, el autor de las Alicia está escindido en dos personalidades.

Algunos otros pensadores han citado de pasada a Carroll y sus obras, como el lingüista Roman Jakobson, que en algún momento alude a Carroll para ilustrar el carácter distintivo de los fonemas en su libro *Ensayos de lingüística general*. El filósofo alemán Ludwig Wittgenstein, cuando explica en qué consiste las palabras sin significado, utiliza pasajes de la obra de Carroll para ilustrar reflexiones en su libro *Investigaciones filosóficas*. El filósofo inglés John L Austin lo nombra para aludir a su teoría de los infortunios, que son una especie de sin-sentidos como los de Carroll, tanto en su libro *Cómo hacer cosas con palabras*, como también, en *Sentido y Percepción*. El filósofo de la Teoría de la Argumentación Chaïm Perelman en su *Tratado de la Argumentación*, cita a Carroll para explicar qué significa el contacto de los espíritus en la comunicación.

Las Alicia de Carroll están construidas con base en dos elementos que se contraponen: el juego y el sueño. En *Alicia en el país de las maravillas*, es el sueño y el juego de naipes, y, en *Alicia a través del espejo*, es el sueño y una partida de ajedrez. En el juego es necesario observar las reglas para poder realizar el juego, en el sueño son violadas las reglas y las leyes para ingresar a la fantasía y al absurdo. Un estado de vigilia y un estado de delirio, están en los extremos. Pero en la medida que son violadas las reglas y se da paso al absurdo, se recrea el modelo que fue violado: al despertarse una persona dice “¡Menos mal que fue un sueño!”, esto es, es capaz de reconstruir la normalidad. Estas preguntas “ingenuas” producto del sueño o del estado de delirio, nos hacen repensar lo que parece obvio, nos ponen a filosofar. Es esta la vía de acceso a aquello que se conoce como el *nonsense* en la obra de Carroll.

En *Alicia en el país de las maravillas* la historia comienza de la siguiente manera: Alicia se encuentra en el jardín con su hermana mayor, quien lee un libro mientras Alicia teje una corona de margaritas. En esa tarea se aburre enormemente, a tal punto que el sueño la va invadiendo. De pronto salta un conejo, y ella corre tras él. Éste se mete a una madriguera y lo mismo hace Alicia. De un momento a otro el túnel se torna vertical y Alicia empieza a caer. Esta caída libre, por cierto, se hace de manera lenta. Jaime de Ojeda, nos dice en una de las notas que: “Carroll como buen

¹¹ Deleuze, Gilles. *Lógica del sentido*. Barral Ed. Barcelona. 1971.

¹² Smullyan, Raymond. *Alicia en el país de las Adivinanzas*. Cátedra. Madrid. 1986. Trd. Montserrat Millán.

matemático, manifiesta enorme interés por la teoría de la gravitación universal, que está siendo objeto de gran desarrollo en su tiempo". Y agrega: "Se ha señalado la similitud de Alicia cayendo muy despacio por un pozo profundo, con el ejemplo empleado por Einstein, de un ascensor cayendo, para ilustrar algunos aspectos de su teoría de la relatividad. Carroll vuelve a emplear este factor literario, que pudiera calificarse de "desgravitación", en su novela Silvia y Bruno, en cuyo capítulo VIII describe la dificultad de tomar el té dentro en una casa que cae vertiginosamente". Alicia mientras cae hace varias reflexiones. Una de ellas es ésta: "¡A lo mejor caigo a través de toda la tierra! ¡Qué divertido sería surgir de golpe por donde vive toda esa gente que anda sobre la cabeza! Los "antipáticos", según me parece".

Esta idea de los antipodales, o gente que anda con los pies hacia arriba con relación a los que están al lado opuesto de la tierra, es un viejo e interesante problema que ha permanecido en el imaginario de los hombres desde que se sabe que la tierra es esférica. Pero esta idea además, permanece en la imaginación de los niños. Esto nos lleva a preguntarnos ¿quiénes están arriba y quiénes abajo, y a la vez, los de abajo están patas arriba en relación a los de arriba?

Como dijimos al comenzar esta reflexión, Martin Gardner retoma la idea de la caída libre de los cuerpos, y en particular da para el tiempo de caída hasta el centro de la tierra, un valor aproximado de 21 minutos.



Martin Gardner (1914 -)**

3. Presentación de Martin Gardner y su Obra.

Martin Gardner es una figura prestante en las letras de nuestro tiempo y un divulgador de las ciencias de talla universal. Su producción intelectual en los últimos cincuenta años permite catalogarlo como uno de los grandes intelectos que ha producido Estados Unidos en el siglo XX. Tiene en su haber más de sesenta libros (diez y siete de ellos traducidos al español), y hoy, después de cumplir sus noventa años (nació en Tulsa, Oklahoma en 1914), puede decirse que aún no ha terminado su carrera como escritor. El amplio espectro de sus actividades intelectuales como escritor, recorre áreas que van desde las ciencias hasta la religión, deteniéndose en la filosofía, las matemáticas, la magia, los juegos y la crítica a la seudo ciencia. Su formación básica la recibió en la

Universidad de Chicago donde obtuvo el título de pregrado en Filosofía. Después de prestar su servicio militar en la Armada de Estados Unidos, regreso a Chicago donde participó del Seminario sobre ciencia que dirigió el gran filósofo austriaco e integrante del llamado *Círculo de Viena*: el profesor Rudolf Carnap (1891-1970). Las notas del seminario (hoy convertidas en el libro *Introducción a la filosofía de la ciencia*), son famosas, porque fue Martin Gardner quien las rescató de las grabaciones magnetofónicas hechas por la esposa de Carnap y que publicó Gardner con la anuencia de Carnap en 1966.

Possiblemente la filosofía, le ha servido de excusa para recorrer y curiosear todo el espectro intelectual, aunque como él reconoce, sin llegar a ser un especialista en ningún campo específico del conocimiento por donde ha trajinado. Su gran mérito está en haber motivado a sus lectores a inquirir con mayor profundidad en los temas que tratan sus libros y sus columnas, como aquella tan leída, *Juegos Matemáticos* de la revista **Scientific American** que mantuvo por 25 años. El hecho de haber estudiado filosofía lo motivó a estudiar matemáticas por cuenta propia, pues en su carrera no vio un solo curso en estos temas. Quien se ponga a leer sus artículos del **Scientific American** desde el comienzo, notará que progresivamente los temas van tomando más y más profundidad, a medida que el autor alcanza mayor madurez en matemáticas. Gardner mismo reconoce: “No hay mejor manera de aprender un tema, que escribir sobre él”.

Carnap ejerció enorme influencia sobre él, a tal punto de persuadirlo de que las preguntas metafísicas son vacías, en el sentido que, ellas no pueden responderse, ni empíricamente, ni con el recurso de la razón. La posición de Carnap en estos temas es consistente con su ateísmo, el cual, el filósofo vienes, creador del positivismo lógico, nunca lo ocultó. Al seguir la línea del creacionismo promulgada por algunos autores que trataron de demostrar, usando la “ciencia”, que el mundo era una criatura y que su evolución estaba dirigida por un ser superior, descubrió que, la argumentación para sustentar esta tesis, estaba viciada. Por esto decidió desenmascarar esta teoría y colocarla en lo que hoy llamamos seudo ciencia, un cuerpo de imprecisiones y verdades a medias que presume ser ciencia, pero que, no es más que palabrería disfrazada de ciencia, creada para atraer mentes inmaduras. La primera obra de este tipo que Gardner publicó fue, *Fads and Fallacies in the Name of Science (Modas y falacias en nombre de la ciencia)* en 1952. Le siguió *Science: Good, Bad and Bogus (Ciencia: Buena, Mala y Espuria)* y más recientemente *The New Age. Notes of a Fringe Watcher (La nueva era. Notas de un Observador Marginal)*.

Martin Gardner fue quien abrió la brecha para que científicos de la talla de Carl Sagan se manifestaran y argumentaran en contra de la seudo ciencia y a la vez mostraran la ciencia en su verdadera dimensión. Libros como *El Código de la Biblia* de Michael Drosnin estuvo en la mira de Gardner para desenmascarar la falsedad de las predicciones que supuestamente aparecen en la Biblia. Su interés en desbancar falsas creencias tiene también como objetivo prevenir a la sociedad del peligro que representan los charlatanes que a través de sus posiciones de poder seudo científico llegan a la política y procuran meterse en el legislativo para implementar leyes que van en detrimento de una sociedad abierta e igualitaria. Es el caso, por ejemplo, del fundamentalista y pentecostal Pat Robertson (el mismo que sugirió que Estados Unidos debería mandar a eliminar al presidente Chávez de Venezuela) que con su poder ha logrado meterse en el Partido Republicano y desde allí busca impulsar leyes que favorezcan sus objetivos oscurantistas y retrógrados.

La obra de mayor circulación de Martin Gardner (más de un millón de copias vendidas) es *The Annotated Alice*, cuya última, y definitiva edición, apareció publicada en el año 2000. Es a través de esta obra que llegamos al fabuloso y encantador mundo de *Alicia en el País de las Maravillas* y

Alicia a través del Espejo, las obras inmortales de Lewis Carroll que tantos interrogantes han planteado, como el que trataremos de formular y responder aquí.

4. La Ley de la Gravedad.

En los *Principia* (forma simplificada de llamar su obra magna *Philosophiae Naturalis Principia Mathematica*) **Isaac Newton** (1643-1727) llega a la Ley de la gravitación universal basándose en las leyes de Kepler, en los trabajos de Galileo y usando las herramientas que ofrecen las matemáticas, en parte inventadas por él. Newton vio más allá que sus contemporáneos porque, como él mismo dijo, estuvo parado en hombros de gigantes, refiriéndose a los matemáticos que lo antecedieron, contando desde Euclides y Arquímedes hasta su maestro Isaac Barrow, y su amigo Edmond Halley. La ley de la gravitación universal se refiere a la fuerza de atracción que ejercen entre si, dos cuerpos de masas m y M situados a una distancia x uno del otro. Esta fuerza F puede calcularse con la simple fórmula:

$$F = GmM/x^2.$$

Donde G es la constante de gravitación universal.

Como mencionamos antes, nuestra historia empieza en el primer capítulo de *Alicia en el País de las Maravillas de Lewis Carroll*, cuando Alicia sale tras el conejo y... “Un momento después, Alicia también desapareció por la madriguera, sin pararse a pensar cómo se las iba a arreglar para salir después. Al principio, la madriguera era como un túnel que se extendía hacia delante, pero de pronto torció hacia abajo tan inopinadamente, que Alicia no tuvo tiempo ni para pensar en detenerse, y se encontró cayendo vertiginosamente por lo que parecía un pozo muy profundo”. Y más adelante Alicia piensa “...Tengo que estar llegando ya bien cerca al centro de la tierra...pero entonces me pregunto ¿a qué latitud y a qué longitud habré llegado? ... ¡que divertido sería, aparecer al otro lado de la tierra entre gente que camina patas arriba! ...”

En la nota 4 de *The Annotated Alice*, Martin Gardner, dice:

“En los días de Carroll hubo considerable especulación popular en torno a lo que podría ocurrir, si uno cayera en un hueco que atravesase la tierra justamente por su centro. Plutarco se había preguntado lo mismo. Muchos otros famosos pensadores, incluyendo Francis Bacon y Voltaire, argumentaron sobre lo mismo. Galileo (*Dialogo dei Massimi Sistemi, Giournata Seconda*, Florencia, 1615, vol. 1, págs. 251-52), dio la respuesta correcta: el objeto caerá con velocidad creciente pero con aceleración decreciente hasta que alcance el centro de la tierra, punto en el cual la aceleración será cero. Por lo tanto la velocidad empezaría a disminuir con una desaceleración creciente hasta que se alcanza el otro extremo de la tierra. Entonces se regresaría a repetir el proceso. Ignorando la resistencia del aire y de la fuerza resultante de la rotación de la tierra (al menos que el hueco se haga de polo a polo, el objeto que cae, oscilaría en torno del centro de la tierra indefinidamente. La resistencia del aire, por supuesto, llevaría al objeto al reposo exactamente en el centro de la tierra. El lector interesado, podría consultar “Un hueco a través de la tierra” por el astrónomo francés Camille Flammarion, en *The Strand Magazine*, Vol. 38 (1909). Ver la página 348, si sólo se quiere disfrutar las ilustraciones”.

“... El interés de Carroll en este asunto se motiva en el hecho de que en el capítulo 7 de su *Sylvie and Bruno Concluded*, se describe (además de una cinta de Möbius, un plano proyectivo, y otros objetos matemáticos o dispositivos científicos curiosos) un método notable de mover trenes

solamente con la energía derivada de la gravedad terrestre. La carrillera iría por un túnel perfectamente recto desde una ciudad a la otra, Puesto que el punto medio del túnel está más cercano al centro de la tierra de lo que están los extremos, el tren debe correr hacia ese centro adquiriendo suficiente energía como para salir, por impulso, al otro extremo del túnel. Curiosamente este tren debería hacer el recorrido (ignorando la resistencia del aire y la fricción en las ruedas) en exactamente el mismo tiempo que emplearía un objeto en caer hacia el centro de la tierra – un poco más de cuarenta y dos minutos. Este tiempo es constante independientemente de la longitud del túnel. La caída hacia el interior de la tierra ha sido un objeto de entretenimiento usado por escritores de literatura infantil, entre los que se destaca, L. Frank Baum en *Dorothy and the Wizard in Oz* (*Dorotea y el Mago de Oz*) y Ruth Plumly Thompson en *The Royal Book of Oz* (*El Libro Real de Oz*). Baum también usó el tubo a través de la tierra como un truco muy efectivo en su pasatiempo *Tik-Tok of Oz*".

Tras las inocentes reflexiones de Alicia y las sesudas anotaciones de Martin Gardner hay un problema de tanta profundidad como el viaje hacia el centro de la tierra. Nuestra imaginación no tiene límites, por algo la llamaban los escolásticos, la loca de la casa y por la curiosidad innata del ser humano se llega a concebir la existencia del hipotético túnel, sin detenerse a pensar en "¿a través de qué lo vamos a construir?, ¿cómo es y de qué está constituido el interior de la tierra?".

Un problema más concreto es el siguiente:

¿Cómo se comporta cuantitativamente la fuerza de la gravedad cuando un cuerpo cae a lo largo de un túnel que atraviesa la tierra de polo a polo, sin tomar en consideración la resistencia del aire?

Antes de atacar el problema debemos entrar a considerar las hipótesis marco, dónde el problema pueda tener solución. Como la constitución estructural de la tierra no es conocida perfectamente, se deben hacer hipótesis sobre la densidad de las diferentes capas; del núcleo; de la variación de la densidad en las capas y hasta el tipo de material que las integra, si es sólido, líquido o gaseoso, por ejemplo; o si tiene vacíos en el núcleo o en alguna de las capas, etc. Aquí tratamos de lograr alternativas de solución basados en hipótesis específicas que permitan comprender el comportamiento de la gravedad en el interior de la tierra o en general de los planetas similares a ella.

Leonhard Euler (1707-1783) respondió a esta pregunta en su libro *Cartas a una Princesa Alemana*, más o menos en los siguientes términos "Usted recordará que Voltaire acostumbraba burlarse de la idea de un hueco que atravesase la tierra, pero no hay nada dañino en imaginarlo, para descubrir cual sería el resultado. ... Estamos convencidos... que la gravedad...actúa con mayor fuerza en la superficie de la tierra y va disminuyendo en proporción a medida que penetramos en la tierra o nos alejamos de la superficie hacia arriba".

La imaginación de los literatos a lo largo de la historia ha visto el interior de la tierra en diferentes formas, desde el tiempo de los antiguos griegos que situaban allí, el infierno, o el lugar de residencia de *Hades* (*Plutón*). Vemos a Dante Allighieri en *La Divina Comedia* representando al infierno en veinticuatro niveles que se extienden hasta el centro de la Tierra. Más recientemente, el escritor francés Julio Verne (1828-1905), en la carátula de su libro *Viaje al centro de la tierra* representa el interior de la tierra como lo muestra la figura 1.



Fig. 1

Tratemos de responder las inquietudes de Alicia, considerando elementos básicos de la física y de las matemáticas.

5. Elementos básicos de mecánica clásica.

Para encontrar la aceleración gravitacional inducida por la tierra sobre un punto particular P , seguiremos a Newton con el enfoque de Andrew J. Simoson¹³. Primero encontraremos la aceleración inducida por cada punto de la tierra sobre un punto específico, y entonces sumaremos su totalidad para hallar la aceleración sobre ese punto. Sea m la masa concentrada en un punto arbitrario $Q=(x, y, z)$ de la tierra, queremos conocer la aceleración gravitacional $a(s)$ inducida por la masa m de Q en la dirección del vector $\mathbf{k} = (0, 0, 1)$ en el punto de masa unitaria $P = (0, 0, s)$. Ver Figura 2.

¹³ SIMOSON, A. J. *The Gravity of Hades*. Mathematics Magazine, Vol. 75, No. 5. December, 2002.

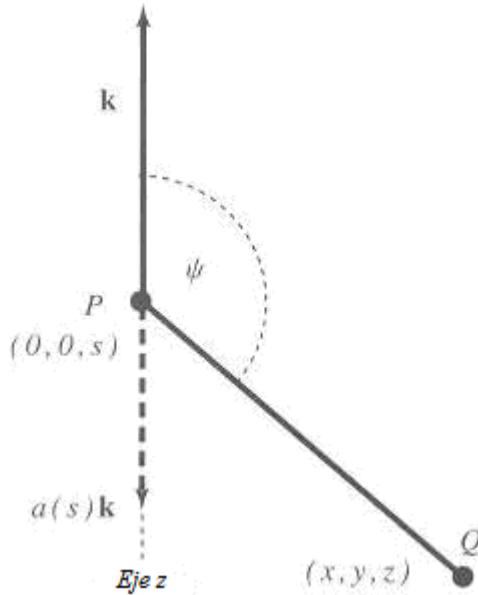


Fig. 2

La ley de la gravitación de Newton afirma que la fuerza de gravedad F entre dos puntos de masas m y M separados una distancia r es:

$$F = GmM/r^2$$

Donde $G = 6.67 \times 10^{-11} \text{ Newtons} \times \text{m}^2/\text{Kg}^2$, es la constante de gravitación universal.

Puesto que la fuerza sobre una masa es igual al producto de la masa por la aceleración, la aceleración gravitacional sobre el punto P en la dirección PQ es $Gm/(x^2+y^2+(z-s)^2)$. Necesitamos sólo la porción de la atracción en el sentido del vector k . Notemos que si Ψ es el ángulo entre el vector PQ y el vector $k = (0, 0, 1)$, entonces

$$\cos \psi = \frac{\langle x, y, z - s \rangle \cdot \langle 0, 0, 1 \rangle}{\sqrt{x^2 + y^2 + (z - s)^2}} = \frac{z - s}{\sqrt{x^2 + y^2 + (z - s)^2}}.$$

Por lo tanto $a(s) = \cos \Psi Gm/(x^2 + y^2 + (z - s)^2)$, lo cual podemos escribir como

$$a(s) = \frac{Gm(z - s)}{(x^2 + y^2 + (z - s)^2)^{\frac{3}{2}}}.$$

(1)

La aceleración $a(s)$ está referida al punto P y en la dirección del vector k . Para planetas ideales, donde el cuerpo celeste se supone compuesto de cascarones esféricos concéntricos de densidad constante y de radio R , la aceleración gravitacional $a(s)$ de un punto a una distancia s del centro de masa del planeta se calcula, primero según el modelo asociado a una burbuja ideal S de masa M , con densidad constante, radio r y centro en $(0, 0, 0)$ y luego se extiende a casos más generales. Entonces la aceleración gravitacional sobre el punto P originada por la burbuja S es

$$a(s) = \begin{cases} 0, & \text{Si } 0 \leq s < r, \\ -\frac{GM}{2s^2}, & \text{Si } s = r, \\ -\frac{GM}{s^2}, & \text{Si } s > r. \end{cases} \quad (2)$$

La deducción de esta formula se encuentra en los libros de mecánica clásica. Aquí la haremos usando parametrización de \mathbf{S} en términos de $\mathbf{r} = (r \cos \theta \sin \phi, r \sin \theta \sin \phi, r \cos \phi)$. Con las variaciones apropiadas de los ángulos θ y ϕ y los correspondientes ajustes para la masa puntual m , la aceleración será

$$a(s) = \int_0^\pi \int_0^{2\pi} \frac{G \frac{M}{4\pi} (r \cos \phi - s) \sin \phi}{(r^2 + s^2 - 2rs \cos \phi)^{\frac{3}{2}}} d\theta d\phi = \int_0^\pi \frac{G \frac{M}{2} (r \cos \phi - s) \sin \phi}{(r^2 + s^2 - 2rs \cos \phi)^{\frac{3}{2}}} d\phi$$

Tomando $u = \cos \phi$, tenemos

$$a(s) = \frac{GM}{2} \int_{-1}^1 \frac{ru - s}{(r^2 + s^2 - 2rsu)^{\frac{3}{2}}} du,$$

Al integrar por partes y simplificando se obtiene

$$a(s) = \frac{GM}{2s^2} \left(\frac{r-s}{\sqrt{(r-s)^2}} - \frac{r+s}{\sqrt{(r+s)^2}} \right)$$

Esta última expresión equivale a la enmarcada arriba, pues si $0 < s < r$, entonces $a(s) = 0$, si $r < s$ obtenemos $-GM/s^2$. Para obtener el caso anómalo, en que $r = s$, debemos cancelar términos antes de hacer la integración.

En el caso ideal, un planeta puede considerarse como formado por una serie de cascarones concéntricos. Cuando s excede a R , en (2) se presenta el caso del principio conocido en mecánica de que cuando hablamos de fuerzas ejercidas por cuerpos celestes, uno puede tratar sus masas como concentradas en sus centros. Más aun, cuando $0 \leq s < R$, la fórmula (2) es un resultado bien conocido en electrostática que tiene características similares a la gravitación, esto es, para esferas metálicas huecas con una carga en su superficie, el campo eléctrico dentro de la esfera es 0. Similarmente para un vacío dentro de un objeto metálico, el campo eléctrico también es cero, sin embargo esto no aplica al campo gravitacional dentro de un vacío arbitrario de un planeta.

6. El modelo general con densidad.

Sea \mathbf{S} una esfera de radio R , masa M , y centro $\mathbf{0}$ cuya densidad a s unidades del centro $\mathbf{0}$ es $\delta(s)$. Esto es, \mathbf{S} es esféricamente simétrica con respecto a su densidad. Entonces

$$a(s) = \begin{cases} -\frac{4\pi G}{s^2} \int_0^s \rho^2 \delta(\rho) d\rho, & \text{Si } 0 \leq s \leq R, \\ -\frac{GM}{s^2}, & \text{Si } s \geq R. \end{cases} \quad (3)$$

La masa del cascarón a la altura del radio ρ es $4\pi\rho^2\delta(\rho)$. Por lo tanto usando (2) obtenemos

$$a(s) = \begin{cases} -\int_0^s \frac{4G\pi\rho^2\delta(\rho)}{s^2} d\rho, & \text{Si } 0 \leq s \leq R, \\ -\int_0^R \frac{4G\pi\rho^2\delta(\rho)}{s^2} d\rho & \text{Si } s \geq R, \end{cases}$$

Fórmula que se reduce a (3) puesto que \mathbf{M} , la masa del cascarón esta implícita en las integrales de arriba.

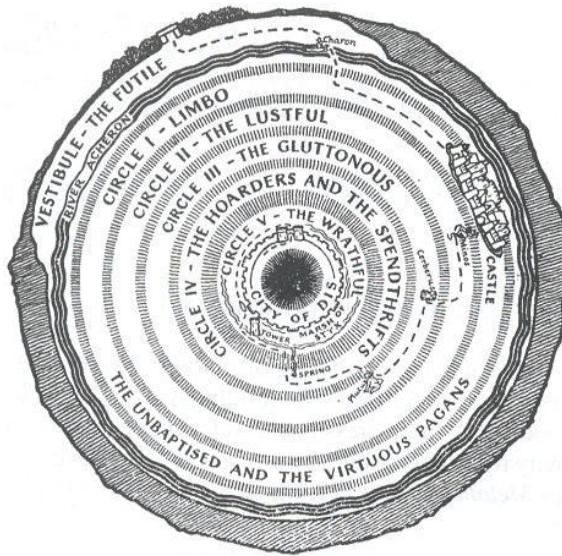


Fig. 3

7. Modelos intuitivos y míticos de la aceleración.

La intuición ha sugerido que la gravedad se mantiene constante a medida que se desciende hacia el centro de la tierra. Héroes míticos como Orfeo reclamando su amor perdido, o Hércules (Heracles) capturando al perro Cérbero que cuidaba la puerta del infierno, el submundo donde habitaba Hades (Plutón), comparten con nosotros su intuición de que no importa cuanto descendamos, la gravedad sigue siendo igual. Ovidio en su libro *Metamorfosis* describe el ascenso de Orfeo con su esposa desde el infierno (el Hades) mostrando como era de dura la pendiente en el camino desde las

profundidades hasta coronar en la superficie de la tierra. De igual manera Dante Alighieri en *La Divina Comedia* deja la impresión de lo difícil del camino que recorrieron él y su compañero de aventura Virgilio entre los vericuetos de los círculos infernales. Lo duro del ascenso lo asimila con el escalar a una de las cimas de los montes Apeninos, vecinos a Roma. El centro de la tierra en *La Divina Comedia* es el sitio de residencia de Lucifer¹⁴ en el séptimo círculo del infierno (Fig. 3). En el centro de la tierra Lucifer aparece con la cabeza en un hemisferio y con los pies en el otro, mostrando gráficamente como en ese punto se truecan los conceptos de abajo y arriba. En la *Moralia*, Plutarco (Siglo I DC) sugiere que si un hombre se situara exactamente en el centro de la tierra tendría tanto su cabeza como sus pies hacia arriba (diríamos, o hacia abajo, según como se mire).

Los casos de apreciación en los ejemplos anteriores de que la gravedad se mantiene constante al descender al centro de la tierra sugiere que la densidad $\delta(s)$, según la fórmula (3), debe ser tal que

$$-\frac{4\pi G}{s^2} \int_0^s \rho^2 \delta(\rho) d\rho = C,$$

Donde C es una constante. Multiplicando la ecuación de arriba por s^2 , derivando con respecto a s y simplificando encontramos la expresión $\delta(s)=k/s$, que relaciona la densidad con la distancia s al centro de la tierra y k es una constante. Esto muestra que el modelo que se tomó en la antigüedad para la gravedad de la tierra, aparece como aquel donde la densidad y la distancia al centro de la tierra varían inversamente. Es interesante ver que, aunque la densidad en las cercanías al centro de la tierra tiende a infinito, la masa de la tierra sigue siendo finita.

El análisis precedente en torno a la suposición de que la gravedad se mantiene constante muestra que la densidad debe tener una singularidad; específicamente cuando $s = 0$, o sea en el centro de la tierra. Otra alternativa de estudio del modelo, es suponer que la densidad es constante o sea que la masa está uniformemente repartida en el interior de la tierra. Tomando como δ la densidad de la esfera S , con masa M y radio R , encontramos, usando (3)

$$a(s) = \begin{cases} -\frac{4\pi G \delta s}{3}, & \text{Si } 0 \leq s \leq R, \\ -\frac{GM}{s^2} & \text{Si } s \geq R. \end{cases} \quad (4)$$

Esta fórmula muestra que la gravedad y la distancia al centro de la tierra son proporcionales hasta llegar a la superficie de la tierra, a partir de donde, la gravedad se vuelve inversamente proporcional al cuadrado de la distancia al centro de la tierra.

8. Un Modelo Interesante.

¹⁴ ALIGHIERI, D. *La Divina Comedia*. Canto XXXIV, págs. 166 y sigs. Edición Compañía Editorial. México. 2003.

Edmond Halley (1656-1742), conocido como el padre de la geofísica, propuso un modelo de la tierra que fuera consistente con los cálculos hechos (erróneamente) por Newton para las densidades de la tierra y la luna en una proporción de 5 a 9. En volumen, la tierra podría en su interior albergar a Venus, Marte y Mercurio. Halley pensó que la tierra debería tener un vacío en su núcleo de 4/9 partes de la misma. Se aventuró a especular que el interior de la tierra a la altura de los radios de Venus, Marte y Mercurio podía haber atmósfera e incluso vida. El cascarón exterior lo tasó de un grosor de 500 millas y mas adentro cascarones concéntricos de radios iguales a los de los planetas citados. Un retrato de Halley hecho en 1736, lo muestra exhibiendo su modelo de una tierra hueca (Fig. 4)



Fig. 4

Este modelo de Halley sirvió de motivación a Edgar Rice Burroughs (el autor de *Tarzán, el hombre mono*) para su novela *En el Núcleo de la Tierra*, escrita en 1908, donde describe un mundo de nombre *Pellucidar*, situado a 500 millas de profundidad dentro de la tierra.

Sigamos este modelo de Halley para hallar la gravedad en uno de los cascarones S , comprendidos entre los radios r y R , de densidad uniforme δ y masa M . Según nuestra fórmula (3), aplicada a S , tenemos

$$a(s) = \begin{cases} 0, & \text{Si } 0 \leq s \leq r \\ -\frac{4}{3}\pi G\delta \left(s - \frac{r^3}{s^2} \right), & \text{Si } r \leq s \leq R, \\ -\frac{GM}{s^2} & \text{Si } s \geq R. \end{cases} \quad (5)$$

Esta fórmula muestra que en la parte hueca de este modelo la gravedad es cero. Si este modelo se acomodara a la realidad y si fuera posible llegar a la parte hueca a través de un túnel, los astronautas irían allá para sus entrenamientos de familiarización con la ingravidez.

Otros modelos se han considerado para la estructura del interior de la tierra, como el modelo de **Robert Hooke** (1635-1703), en el cual se considera el interior de la tierra constituido por dos partes homogéneas, el núcleo con densidad δ_1 y masa M_1 y el manto con densidad δ_2 y masa M_2 . En este caso la aceleración de la gravedad está dada por las fórmulas:

$$a(s) = \begin{cases} -\frac{4\pi G\delta_1 s}{3}, & \text{Si } 0 \leq s \leq r, \\ -\frac{GM_1}{s^2} - \frac{4}{3}\pi G\delta_2 \left(s - \frac{r^3}{s^2}\right), & \text{Si } r \leq s \leq R \\ -\frac{G(M_1 + M_2)}{s^2}, & \text{Si } s \geq R. \end{cases}$$

La gravedad es máxima para un punto $s = r(\sqrt[3]{2(\delta_1 - \delta_2)/\delta_2})$, siempre que: $r < s < R$.

Con el conocimiento de los modelos anteriores ya podemos dar respuesta a la pregunta que surge ante la inquietud de Alicia en cuanto al comportamiento de la gravedad en su caída hacia el centro de la tierra. Más específicamente quisiéramos contestar a la siguiente pregunta:

Si se perfora un hueco a través del centro de la tierra de polo a polo, y una roca se deja caer a través del hueco, ¿Con qué velocidad llegará al centro de la tierra y en qué tiempo?

El producto de la aceleración, por la velocidad puede escribirse de acuerdo al cálculo diferencial, en dos formas,

$$v \frac{dv}{dt} = a \frac{ds}{dt}.$$

Integrando esta identidad, variando el tiempo entre 0 y τ , encontramos

$$\int_0^\tau v \frac{dv}{dt} dt = \int_0^\tau a \frac{ds}{dt} dt.$$

Sabemos que s y v son funciones monótonas con respecto a t cuando la roca cae de la superficie al centro de la tierra, y puesto que la velocidad inicial es cero, la ecuación anterior se simplifica, como

$$\frac{v^2(s)}{2} = \int_R^s a dr,$$

Como la velocidad es negativa cuando el cuerpo cae hacia el centro de la tierra, extrayendo raíz cuadrada tenemos

$$v(s) = -\sqrt{2 \int_R^s a dr}. \quad (6)$$

Por lo tanto la velocidad de la roca cuando pasa por el centro de la tierra es $v(0\text{Km})$. Para encontrar el valor del tiempo T que le toma a la roca llegar al centro de la tierra, hacemos una partición uniforme del intervalo de 0 a R , como $0=s_0 < s_1 < s_2 < \dots < s_n=R$. Así $\Delta s=R/n$, para cada entero positivo n . Podemos aproximar el tiempo para que la roca caiga de s_i a s_{i-1} por el promedio $-\Delta s/v_i$, donde $v_i = v(s_i)$ es la velocidad para cada i entre 1 y $n-1$. El tiempo aproximado T es la suma de estos $-\Delta s/v_i$ o sea que T , lo encontramos en el límite de esta suma, es decir la integral de Riemann dada por

$$T = \int_0^R \frac{-1}{v} ds. \quad (7)$$

Con la ayuda de las fórmulas anteriores podemos, según el caso, calcular la velocidad y el tiempo al llegar al centro de la tierra.

9. Caso en que la densidad es constante. Usando (4) encontramos que $a(s) = ks$, para $0 \leq s \leq R$, donde k es constante. Puesto que $a(R) = -g$, entonces $k = -g/R$. Con la fórmula (6) hallamos que la velocidad está dada por

$$v(s) = -\sqrt{2 \int_R^s \frac{-g}{R} r dr} = -\sqrt{\frac{g}{R} (R^2 - s^2)},$$

Así $v(0) = -\sqrt{gR} \approx -7.9 \text{ km/s}$.

Por la ecuación (7)

$$T = \int_0^R \frac{1}{-v} ds = \int_0^R \sqrt{\frac{R}{g}} \frac{1}{\sqrt{R^2 - s^2}} ds = \frac{\pi}{2} \sqrt{\frac{R}{g}} \approx 21.2 \text{ minutos.}$$

10. Caso en que la aceleración es constante.

Si $a(s) = -g$, para $0 \leq s \leq R$, con el uso de (6) se llega a que

$$v(s) = -\sqrt{2 \int_R^s -g dr} = -\sqrt{2g(R-s)},$$

Así que, $v(0) = -\sqrt{2gR}$ que es aproximadamente, -11.2 Km/seg . El tiempo T para llegar al centro de la tierra está dado por

$$T = \int_0^R \frac{1}{\sqrt{2g}} \frac{1}{\sqrt{R-s}} ds = \sqrt{2} \sqrt{\frac{R}{g}} \approx 19.0 \text{ minutos.}$$

11. El modelo del agujero negro

Si suponemos que toda la masa de la tierra estuviera concentrada en su centro, por la ley de Newton tendríamos, $a(s) = k/s^2$, para $0 < s < R$ y donde k es una constante. Como antes, $a(R) = -g$, de lo que se sigue que $k = -gR^2$

Aquí tendremos

$$v(s) = -\sqrt{2 \int_R^s \frac{-gR^2}{r^2} dr} = -\sqrt{2gR \left(\frac{R}{s} - 1\right)},$$

Por lo que $v(0) = -\infty$.

El tiempo T que le tomaría a una roca que cae al centro de la tierra, lo da la fórmula siguiente

$$T = \int_0^R \frac{1}{\sqrt{2gR}} \sqrt{\frac{s}{R-s}} ds = \frac{\pi}{2\sqrt{2}} \sqrt{\frac{R}{g}} \approx 15.0 \text{ minutos.}$$

Como dijimos al principio, los modelos anteriores son hipotéticos, pero las fórmulas siguen siendo útiles y darán resultados apropiados, cuando conozcamos la densidad y en general la aceleración y la estructura del interior de nuestro planeta.

Los tiempos encontrados para los tres modelos, no coinciden con la apreciación de Martin Gardner, quien da para T un valor próximo a los 42 minutos, lo que muestra que el modelo en el cual, él se basa, no es ninguno de los aquí descritos.

COLOFÓN

Tal y como dijimos al principio, la obra de Lewis Carroll está constituida de absurdos, o sin-sentidos, lo que nos permiten incursionar en problemas bien complejos, pues, el sin-sentido carrolliano busca poner en cuestión nuestras creencias; aquellas que, de tanto repetirlas se nos fueron convirtiendo en “verdades” incuestionables. Carroll con su obra nos despierta al conocimiento, nos devuelve la capacidad de interrogar, de sentir perplejidad ante lo que nos rodea, y sobre todo nos da la posibilidad de poner a funcionar la mente en forma creativa.

Una pregunta, al parecer ingenua, de la niña Alicia llevó por caminos insospechados a Gardner a plantearse un problema serio. Esta misma pregunta ha permitido que los autores de este ensayo, hiciéramos este intercambio disciplinar que confluye en una propuesta de tipo pedagógico, que puede resumirse en la presentación en el aula de un problema como el de la gravedad a partir del

cual se trabaja en tres direcciones: literaria, matemática y filosófica, de tal manera que el estudiante salga enriqueciendo prolíjamente su capacidad de análisis y su cobertura cultural.

*) Retrato tomado de la obra citada *The Annotated Alice* de Martin Gardner.

**) Foto que aparece en la entrevista a Martin Gardner en *Skeptical Enquirer*, Editor Kendrick Frazier y tomada de Internet.