La Conjetura de Poincaré y los Juegos de Infancia

Diego Pareja Heredia. *Universidad del Quindío*

"*El verdadero método de predecir el futuro de las matemáticas es el estudio de su historia y de su estado actual*".
"*Los matemáticos nacen. No se hacen*".
"*Con la lógica probamos; con la intuición inventamos*". Henri Poincaré

Resumen: Nuestra infancia transcurrió en la ensoñación y la fantasía. Con primitivas herramientas y con el recurso que nos proveía la naturaleza nuestros juguetes empezaban a serlo desde el momento en que iniciábamos su construcción. La conjetura de Poincaré, un problema de altas matemáticas, se podría motivar, con el concurso de esos juguetes de infancia, como las pompas de jabón que fluían al soplo de nuestro aliento a través de una cánula de higuerilla o de un tubito de carrizo.

Abstract: Our childhood began with a world of fantasy. Toys started when our own hands crafted them, with primitive tools and with immediate nature resources. Poincaré´s Conjecture, a problem from high mathematics, could be motivated through those childish toys like soap's bubbles sparkled out from higuerrilla's cannulas or carrizo's tubes, under the pressure of our blow.

Introducción.

Esta exposición pretende mostrar cómo desde lo más simple – como son los juguetes de infancia – es posible motivar la comprensión de complejos problemas matemáticos, entre ellos, uno resuelto hace pocos años: la **Conjetura de Poincaré**. Esta conjetura formulada en 1904 por Henri Poincaré (1854-1912), tiene que ver con la clasificación de ciertas entidades matemáticas, conocidas como "variedades" (*Manifold*s en inglés). Una variedad es una entidad geométrica que, a nivel local, luce como un espacio euclídeo. Los espacios euclídeos son las generalizaciones – con ciertas características – de entes geométricos como la recta, el plano, el espacio, objetos geométricos a los que estamos acostumbrados desde nuestra educación elemental. Ejemplos de variedades muy simples, pero muy cercanas a nuestra infancia son la esfera hueca cuya representación empírica la vemos en una pompa de jabón y la circunferencia asociada al aro, tras el cual, corríamos cuando niños.

Antes de entrar en materia, hagamos a manera de preámbulo, unas reflexiones en torno a la educación matemática. Por años la educación matemática se ha mantenido estancada en lo relativo a sus contenidos. Esto es fácilmente verificable por cuanto que, hace más de cien años los profesores de educación media, por ejemplo, desconocen, sin ningún reparo, aquello que es objeto de investigación en los frentes de las matemáticas y en general se ignora los nombres de los matemáticos que lideran esas investigaciones y los centros donde las matemáticas forman el núcleo central de su actividad investigativa.

Pero el atraso va más allá. La generalidad de docentes de matemáticas desconocemos nombres como los de Gauss, Riemann, Klein, Hilbert, Poincaré y Tarski, para citar sólo seis entre un centenar de matemáticos de primera línea que en los últimos doscientos años han hecho de las matemáticas, el mayor campo de investigación intelectual en toda la historia de la humanidad. Es preocupante saber que los mismos profesores universitarios, de un área tan fundamental en la cultura actual, ignoren las contribuciones que estos personajes han hecho a las matemáticas. Esta crítica no está referida exclusivamente a nosotros, los profesores colombianos, es casi un patrón universal. El desconocimiento de la historia de las matemáticas y sus contenidos científicos, son una tara que ha calado hondo en todas las culturas, casi sin excepción, y hoy por hoy a nivel internacional, no se ha logrado dimensionar la magnitud, ni las consecuencias de ese atraso.

En Estados Unidos, por estos tiempos, el tema de la educación matemática, ha tomado un cariz de verdadera "guerra matemática" (*math wars,* como se lo denomina en inglés) y no pocos matemáticos de renombre han podido sustraerse al conflicto. Sin embargo, los frentes de batalla, están más, en el área de su enseñanza y apreciación, que en el aspecto de su actualización y puesta al día de sus contenidos. Tengo la sensación de que seguimos, en geometría, enseñando a Euclides, desconociendo a Riemann; o que seguimos enseñando a Al-Khowarizmi, olvidando a Leibniz, Gauss, Dedekind y Frege; o seguimos enseñando cálculo diferencial e integral a espaldas de Weierstrass, Dirichlet, Poincaré y Banach (para mencionar sólo unos nombres). Continuamos reciclando las matemáticas de hace cien años desconociendo grandes matemáticos que, como Gödel y Tarski en el siglo pasado, nos cambiaron la idea filosófica tradicional, de que las matemáticas estaban exentas de toda inconsistencia.

El desconocer en el aula de matemáticas los nombres de quienes extienden las fronteras de las matemáticas, es comparable a ignorar en la clase de literatura, los nombres de quienes ostentan los premios Nobel en esa área humanística. Si no leemos a esos autores en clase, al menos deberíamos saber quienes son. En matemáticas, al igual que en literatura, tenemos laureados de la misma talla de un Nobel. Por un lado está la Medalla Fields, que se otorga cada cuatro años en los Congresos Internacionales de Matemáticos y de otro lado hay dos galardones de igual prestancia, como son, el Premio Abel de la Academia de Ciencias de Noruega[1] y el Premio Schock de la Academia Sueca de Ciencias[2]. No obstante su importancia, muy pocos profesores en el mundo conocen los nombres de estos galardonados, sus áreas de investigación o sus interesantes resultados.

Las Variedades n-dimensionales.

El niño desde que da sus primeros pasos empieza a entender que su mundo es de tres dimensiones: dos en la superficie donde se desplaza y la tercera dimensión en los brazos de su madre, por ejemplo. A esta tercera dimensión no puede acceder directamente con su propio andar; requiere de un medio externo, el que no está a su alcance. En este espacio tridimensional aprende a distinguir y a apreciar formas cada vez más complejas. Normalmente antes de los tres años el niño ya tiene una apreciación del círculo y de la esfera, por el contacto directo con objetos que se asemejan a estas figuras: las arepas, tortillas, por un lado, las bolas, las naranjas, etc., por el otro. Mas adelante distinguirá las rosquillas (donas o roscones), que materializan figuras ideales como es el toro[3] que corresponde a la superficie de una dona, o de un neumático de llanta inflado.

La recta, la circunferencia, la superficie de la esfera y el toro son ejemplos de variedades. Las dos primeras son variedades de dimensión uno; aunque como figuras, la primera esté en un espacio unidimensional y la segunda sea un objeto bidimensional. La esfera y el toro son variedades de dos dimensiones, no obstante estar en un espacio tridimensional. A la circunferencia podemos llegar, tomando el segmento [0 , 1) y encorvarlo uniformemente, de tal manera que el extremo de la izquierda coincida con el extremo de la derecha. A la esfera

---

[1] La página Web es:

[2] Consultar:

[3] De la palabra latina *torus*, que significa moldura redonda.

hueca (técnicamente llamada 2-esfera[4]) llegamos usando un círculo elástico que, al encocarlo uniformemente, al final, la frontera (la circunferencia) se reduzca a un punto indistinguible en la superficie. Es lo que hacemos cuando niños, al soplar por la caña de bambú o higuerilla, mojada en uno de sus extremos por una película jabonosa, a la presión de nuestro aliento, se convierte en una burbuja multicolor.

La construcción del toro presume la rotación de una circunferencia alrededor de un punto central hasta regresar al punto de partida la figura resultante es como un flotador o un neumático de llanta inflado. Otra forma de conseguir un toro es encorvando un rectángulo hasta obtener un tubo (cilindro) el que se encorva de nuevo y se pega en los dos extremos. El toro al que, aquí nos referimos, corresponde solamente a la superficie exterior, sin consideración al espesor de la figura[5]. Lo mismo diremos de la burbuja a la que hicimos referencia; aquí tenemos que abstraer nuestra idea geométrica de esfera a la superficie exterior sin tener en cuenta su interior.

Otra variedad interesante y a la que podemos acceder fácilmente, se conoce como *Cinta de Möebius* que resulta al pegar una cinta en sus extremos después de haberle hecho un giro de ciento ochenta grados. Esta superficie llama la atención, entre otras cosas, porque es una superficie de una sola cara. Lo que caracteriza a estas últimas superficies es, de una parte su curvatura constante y de otra, sus dos grados de libertad, es decir, si uno estuviera en una superficie de estas, al desplazarse de un punto a otro, debe seguir el patrón: adelante-atrás o derecha-izquierda. Esa posibilidad de moverse en dos direcciones es lo que nos permite en cierto sentido decir que son variedades de dimensión dos. Para el caso de la circunferencia, sin embargo, sólo hay un grado de libertad, digamos, adelante-atrás.

Las variedades bidimensionales tienen otra particularidad y es que se dejan cartografiar, es decir, una región en la superficie de la variedad, se puede representar en un mapa plano de tal forma que las curvas que unen dos puntos de la variedad con distancia mínima se van a convertir en el plano en segmentos de rectas que unen las imágenes de los dos puntos dados. Estas curvas se llaman geodésicas. Esto ocurre en el caso de la superficie de la tierra que por estar en la esfera la podemos visualizar e interpretar en el plano a través de los mapas y los atlas que son representaciones planas de una superficie esférica. Podemos decir en general que las variedades de dimensión n, en el aspecto local lucen geométricamente como espacios euclídeos n-dimensionales, más explícitamente una vecindad de un punto en la variedad, se puede transformar en una vecindad de un punto en el espacio euclídeo asociado a la variedad.

Hay distintas clases de variedades. Una forma de clasificarlas es estudiando, lo que se llama, su grupo fundamental, lo que intuitivamente corresponde, al “número de agujeros” que tenga la variedad. Por ejemplo el toro tiene un agujero en el centro y otro en su interior, así su grupo fundamental es dos. De la esfera hueca o 2-esfera, por ejemplo, se dice que su grupo fundamental es cero o “trivial” o que no tiene huecos. Otra forma de entender esto es que en la esfera toda curva cerrada simple (sin autocortes) se puede contraer a un punto. Una variedad como la 2-esfera tiene la propiedad de ser suave (no carrasposas) y dentro de ella se puede definir una noción de distancia, de tal forma que a cada par de puntos se les asocia un

---

[4] Para una definición y un estudio detallado de la 2-esfera ver mi artículo: *Métricas, Geometrías y Trigonometrías* en:
[5] En el Congreso Mundial de Matemáticos de Madrid (2006) el escultor japonés Keizo Ushio esculpió un toro sólido que al dividirlo apropiadamente dio origen a cuatro cintas de Möebius. Ver fotos al final de: http://www.matematicasyfilosofiaenelaula.info/fotos/20ICM.htm

número no negativo, su distancia. Esa distancia se mide sobre una curva que une los dos puntos de manera que esa distancia sea mínima. Esas curvas se denominan geodésicas.

La Conjetura de Poincaré.

La Conjetura de Poincaré se investigó por más de cien años y aun hoy el tema no pierde vigencia, en razón a las múltiples conexiones con la física y las matemáticas.

Después del gran despliegue periodístico hecho en el año 2006, relacionado con la prueba de la conjetura de Poincaré y de su principal protagonista, el ruso Grigori Perelman, nos queda el compromiso de analizar más sosegadamente la interpretación y las implicaciones que de tal resultado se derivan.

Hay variedades con la característica adicional que: toda curva cerrada simple (sin autocortes) que cae en la variedad, si se contrae continuamente, se reduce a un punto. Esta característica la posee la 2-esfera, a la que hemos hecho referencia. Ni el toro, ni la circunferencia, ni la cinta de Möebius, tienen esta propiedad. Las variedades pueden extenderse teóricamente a mayores dimensiones. Como somos habitantes de un espacio tridimensional no podemos ver desde aquí cómo son las variedades de dimensión tres, por ejemplo.

La conjetura de Poincaré, como dijimos, tiene que ver con la clasificación de variedades de dimensión tres. Las variedades como objetos topológicos, fueron introducidas por el matemático alemán Bernhard Riemann (1826-1866). Los espacios euclídeos son la generalización del espacio tridimensional, con la métrica euclidiana o usual. Las variedades n-dimensionales, aunque son objetos del espacio de dimensión n + 1, se asemejan localmente a esferas del espacio n-dimensional, lo que indica que se puede "mapear" partes de la variedad en el espacio de dimensión n. Se sigue que la geometría de la variedad se puede conocer siempre que conozcamos la aplicación que origina los correspondientes mapas de la variedad en $\mathbf{R}^n$.

¿Puede toda variedad *simplemente conexa* de dimensión tres, deformarse continuamente hasta convertirse en una 3-esfera? Esta fue la pregunta que se hizo Poincaré en 1904. El matemático francés conjeturó que la respuesta debía ser afirmativa. La 3-esfera es la contraparte en cuatro dimensiones de la 2-esfera. Nuestra mente no llega a formarse una idea de cómo podría ser una 3-esfera; sólo podemos concebirla analíticamente a través de la fórmula:

$$\mathrm{S}_3 = \{(x, y, z, w)\colon\ x^2 + y^2 + z^2 + w^2 = 1\}.$$

Las inquietudes filosóficas que se derivan de la conjetura de Poincaré son variadas e importantes. En esencia, la conclusión de la famosa conjetura, induce a creer que el hombre puede conocer características fundamentales del mundo en que vive sin salir de él. Suponer que habitamos un espacio de tres dimensiones no significa que como seres específicos lo copemos todo, en el sentido de que lo podamos recorrer hasta sus confines más remotos. Es nuestra imaginación, la que nos permite considerar esa hipótesis. Hay limitaciones insalvables que nos sujetan a nuestro mundo. La gravedad, entre ellas, nos fija a la tierra; y otras como las condiciones propias del espacio exterior tan diferentes al medio en que vivimos, no permiten que salgamos libremente del encierro terrestre en que estamos. A pesar de esas limitaciones y de no haber salido de la superficie de la tierra, el hombre llegó a la conclusión, por ejemplo, de que la tierra en que vivimos, es redonda.

El descubrimiento de América, un hecho trascendental en la historia humana, estuvo a medio camino en la confirmación de que la tierra era redonda. Creemos que el mismo Colón murió sin la evidencia concreta de que nuestro planeta tuviera forma esférica. Cuando se circunnavegó la tierra por primera vez, se acopió una evidencia mayor que sugería la redondez de la tierra. Pero aun así, la tierra, sin ya ser plana, podía tener forma toroidal (como rosquilla) y circunnavegarla podría hacerse en dos formas distintas: o siguiendo la dirección longitudinal, o de otro modo: siguiendo la dirección transversal. Lo que en últimas comprobó la redondez del planeta fue su estudio geométrico y cartográfico. En el aspecto geométrico, los antiguos griegos, particularmente Eratóstenes y Aristarco habían mostrado que la tierra tenía forma esférica. Hubo que esperar hasta el siglo XVI, para encontrar proyecciones como la de Mercator[6] que permitieron ver la superficie esférica de la tierra en forma de mapas o de un atlas, donde la curvada superficie de la tierra aparecería en forma plana con el recurso de los mapas y de allí concluir que todo el planeta, ahora sí redondo, quedaba cartografiado.

Llegar a conocer la forma de nuestro mundo desde una perspectiva local, no puede subestimarse. En tiempos modernos basta mirar la superficie terrestre desde las alturas de un jet en un viaje intercontinental, para cerciorarse de la redondez de la tierra al descubrir la curvatura del horizonte. Sin embargo, las culturas que nos antecedieron no tuvieron la misma perspectiva. Su intuición primaria los inducía a creer que la tierra era plana.

En la respuesta a la pregunta, ¿dónde estamos?, va implícita la solución a la conjetura de Poincaré. Al observar un caracol deslizarse sobre el piso, notamos que sus desplazamientos están limitados a dos dimensiones: adelante-atrás y derecha e izquierda. El hecho de que el caracol suba y baje de un árbol no significa que cubra otra dimensión, sólo muestra que la superficie que habita se curva, pero igual, sigue siendo una superficie. Esa apreciación de la superficie donde el caracol se mueve, la obtenemos porque nuestra mente se acostumbró al manejo de tres dimensiones, y claro, uno percibe "desde afuera" las dos dimensiones de la superficie en cuestión. Como habitantes de un mundo tridimensional, nos podemos mover con tres grados de libertad: adelante-atrás, derecha-izquierda y arriba-abajo. El caracol, solamente tiene dos grados de libertad. Entonces, aquí viene la pregunta ¿Qué forma tiene el mundo que habitamos, habida cuenta que somos solo parte de un espacio mayor de cuatro dimensiones?

Al estar impedidos para abandonar nuestro mundo de tres dimensiones, no podemos "ver" nuestro propio mundo, desde afuera, digamos, desde un espacio de más de tres dimensiones. Para Poincaré era posible estudiar, desde adentro, la estructura de nuestro universo para hallar ciertas pautas que caracterizaran su forma. Con los trabajos de Perelman, como fichas claves para resolver el rompecabezas, la mayoría de los matemáticos especializados en topología y que han leído la obra del autor ruso, creen que la conjetura tiene una respuesta positiva. No sobra decir, que hasta ahora, no conocemos la reacción de los físicos al respecto, para quienes el resultado de la conjetura tiene un peso enorme en la concepción del espacio físico, por cuanto los modelos que emplea la física en la interpretación del universo están ligados al enfoque del espacio-tiempo donde las variedades topológicas juegan un papel importante.

[6] Para una nota biográfica visitar: http://es.wikipedia.org/wiki/Gerardus_Mercator

Volvamos al mundo del caracol. Desde fuera, uno ve claro que su mundo podría ser la corteza de la esfera o la superficie de un toro con uno o varios agujeros. En esas superficies como su universo, pueden perfectamente vivir en sus dos grados de libertad; deslizándose a lo largo y ancho de la superficie que le sirve de soporte. ¿Puede determinar el caracol desde su mundo, cuál es la forma del mismo, habida cuenta que conoce la geometría asociada a él? Para el caso de estas superficies, la respuesta es afirmativa. Análogamente, ¿Podemos nosotros, seres humanos, conocer también la forma de nuestro mundo sin salir de él? Según la solución a la conjetura de Poincaré, la respuesta es también afirmativa.

La conjetura de Poincaré afirma que si podemos siempre reducir una curva en el espacio a un punto, entonces el espacio en que vivimos es análogo a la superficie de una esfera, pero si el lazo que forma la curva al reducirlo queda enredado, es porque nuestro universo debe tener uno o más huecos, como si se tratara de un toro, con uno o más agujeros.

El enunciado de la conjetura, en términos técnicos afirma que: ***Toda variedad de dimensión tres, cerrada y simplemente conexa es homeomorfa a una 3-esfera***.

Los trabajos de Perelman, hechos públicos en la Web en los años 2002 y 2003 dieron la clave, según los entendidos, para lograr la clasificación de las variedades de dimensión tres. Para entender qué es lo que caracteriza a una variedad simplemente conexa tomemos la analogía que el matemático inglés Keith Devlin usa en su columna de la MAA[7]. Supongamos que al salir de la tierra en una “nave espacial”, llevamos atado un hilo a nuestra nave, de tal forma que al regresar a nuestro punto de partida, no necesariamente por la misma ruta, al hacer una lazada con el hilo, ocurre una de las alternativas siguientes: o, al halar de un extremo del hilo, el lazo, degenera en un punto, o, por más que halemos, o el hilo se queda atorado en uno o varios agujeros. Si se da el primer caso, el universo en que vivimos es análogo a la 3-esfera. Si ocurre el segundo caso, nuestro universo debe tener uno o más agujeros, como ocurre en el caso de un toro. En el caso del caracol, si su huella, desde el punto de partida hasta el retorno, puede irse contrayendo sin romperse, hasta convertirse en un punto, el caracol puede afirmar que su mundo es análogo a la superficie de una esfera. En otro caso su mundo tendrá la forma de un toro con uno o varios agujeros. Superficies con la propiedad de no tener agujeros se llaman, simplemente conexas. Lo que básicamente Perelman muestra es que, el procedimiento descrito puede extenderse para determinar, en principio, la forma de nuestro mundo tridimensional, sin salir necesariamente de él.

Para una descripción técnica y detallada de los métodos empleados para la solución de la conjetura de Poincaré, invitamos al lector a mirar la prueba, en el artículo de más de trescientas páginas, asequible a través de la red, "A Complete Proof of the Poincaré and Geometrization Conjectures: Application of the Hamilton-Perelman theory of the Ricci flow”.

Varias Medallas Fields, han distinguido a matemáticos que trabajaron en la teoría que llevó a la prueba de la conjetura de Poincaré. Amén de Grisha Perelman (2006), debemos nombrar a William P. Thurston (1982), Simon Donaldson y Michael Freedman (1986), Steve Smale (1966) y John Willard Milnor (1962). La teoría de Flujo de Ricci, que usó Perelman en sus trabajos para la demostración de la conjetura, fue creada por Richard Hamilton, hoy profesor de la Universidad de Columbia en Nueva York. La conjetura de Poincaré cobró mucha

[7] Ver: http://maa.org/devlin/devlin_12_06.html donde aparece el artículo. MAA es la sigla de The Mathematical Association of America, la asociación que agrupa a buena parte de los profesores universitarios de matemáticas de Estados Unidos y otras partes del mundo

pantalla al ser incluida en la lista de los *Siete Problemas del Milenio* del Clay Mathematics Institute[8]. Estos premios tienen una bonificación de un millón de dólares cada uno. Perelman rechazó la Medalla Fields y según se rumoraba en el Congreso Internacional de Matemáticos de Madrid de 2006, el matemático ruso iba a rechazar también el millón de dólares del Instituto Clay. En eso tiene razón Perelman, las matemáticas no necesitan ni premios, ni honores para desarrollarse, sólo la pasión intensa de quien va en busca de una verdad para su ciencia.

Este artículo corresponde a las notas de una exposición dirigida a estudiantes de la Institución Educativa Antonio Nariño de San Pablo (N), Colombia, con ocasión del cincuentenario de su fundación en Febrero 5 de 2009.

[8] Para detalles ver: http://www.claymath.org/millennium/.