MÉTRICAS, GEOMETRÍAS Y TRIGONOMETRÍAS

Diego Pareja Heredia. *Universidad del Quindío.*

1. – Introducción.

La noción de métrica o medida está inmersa en las matemáticas, al menos, desde los mismos orígenes de la *Geometría.* Cuenta Heródoto (Siglo V AC) en la historia del mundo antiguo, que, la geometría tuvo su origen en Egipto, y estaba asociada a las técnicas de medir terrenos; de allí su nombre griego: de *geo*, tierra y *metron,* medida. La medida es tema importante en toda rama de las ciencias fácticas, y particularmente llega a casi todo el espectro del análisis y las matemáticas aplicadas, desde las ecuaciones diferenciales hasta la teoría de probabilidades.

La teoría de la medida se convirtió en una parte independiente del análisis comenzando el siglo XX con los trabajos de Henri Lebesgue (1875-1941), Maurice Frechet (1878-1973) y Emile Borel (1871-1956) de un lado, y del otro con los aportes a la construcción de los espacios, llamados abstractos, por David Hilbert (1862-1943) y Stephan Banach (1892-1945) y la fuerza que imprimió a estos temas la escuela polaca de matemáticas liderada por Zygmunt Janiszewski (1888-1920), primero, y luego por Waclaw Sierpinski (1882-1969), Kazimierz Kuratowski (1896-1980), Stefan Mazurkiewicz (1888-1945), Alfred Tarski (1902-1983) y Stanislaw Ulam (1909-1984), entre otros. Un impulso importante en la generalización del estudio de la teoría de la medida, a nivel universitario, la inició Paul R. Halmos (1916-2006)[1] con su libro, ahora un clásico, *Measure Theory*. Halmos, un discípulo de J. L. Doob (el mismo de los Procesos Estocásticos), fue asistente de John von Neumann en el *Instituto de Estudios Avanzados* de la Universidad de Princeton y es hoy, un personaje de gran estatura en la comunidad matemática mundial.

Entre lo más intuitivo del conocimiento matemático está el concepto de medida, que no es otra cosa que asociar a un objeto un valor numérico. Los objetos a los que se aplica la medida, desde luego, deben ser susceptibles de ser medidos, como, por ejemplo, la longitud de una curva o de un segmento de recta, el área de una superficie, la densidad de la materia, la carga eléctrica de una batería, la probabilidad de que un fenómeno o suceso ocurra. La medida en los segmentos, es la longitud, en las superficies, el área y en los sólidos, el volumen. Estas medidas que vienen desde los griegos, no fueron cuestionadas si no hasta los principios del siglo XX, cuando se encontraron resultados muy extraños como es el caso de la *Paradoja de Banach-Tarski,* según la cual, dos esferas sólidas **A** y **B** en el espacio tridimensional**,** aun de diferente volumen, una de ellas podría descomponerse en un número finito de partes disyuntas, de tal manera que al rearmarse se puede obtener la otra. Esto genera resultados contra evidentes, a tal extremo, de aceptar que una arveja se puede descomponer en un número finito de partes disyuntas para a partir de éstas, reconstruir una esfera del tamaño de nuestro sol. A este resultado llegaron Banach y Tarski con argumentos basados en el *axioma de elección.* Para una relación histórica de este resultado y su conexión con el *problema de medida,* ver [2].

El cálculo integral, empezando con el método de Arquímedes, ha asociado cantidades numéricas a conjuntos de distinto tipo; ya sean estos, superficies limitadas por curvas, ya sea

---

[1] Ver Obituario de Paul Richard Halmos en: http://www.matematicasyfilosofiaenelaula.info

concentración de masa en cuerpos laminares o volúmenes de sólidos. En general, la integración de funciones de valor real o de funciones definidas en espacios abstractos, como espacios de Hilbert o de Banach asigna valores reales, que cuando son no negativos se pueden pensar como valores de una medida. La teoría de probabilidades tiene como objeto de estudio las variables aleatorias, que vistas desde la perspectiva del análisis se comportan como funciones, y por lo tanto, su tratamiento recurre también a la integral en el caso continuo, y a las series en el caso discreto.

2. – La definición de métrica.

La brevedad de esta nota, no permite estudiar las métricas en extenso. Un estudio detallado de estos temas se encuentra en Royden [4]. Pero, la comprensión de lo que sigue no requiere más que la definición de métrica.

Una métrica definida en un conjunto producto $S \times S$, es una función d, de valor real, con las siguientes propiedades:

(i) $d(x, y) \geq 0$. Para todo par (x, y) en $S \times S$ y $d(x, y) = 0$, si y solo si $x = y$.
(ii) $d(x, y) = d(y, x)$. Siempre que (x, y) en $S \times S$.
(iii) $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$, para todo x, y, z en S (Desigualdad del Triángulo).

A la función d así definida, se le da el nombre de métrica, o *función distancia* en S. A funciones como *d,* se les da el nombre de funciones de conjunto, porque en efecto, asocian con cada conjunto de su dominio, un número real. El par (S, *d*) se conoce en análisis matemático, como un *Espacio Métrico.*

Un espacio métrico sencillo y cercano a nosotros es, el espacio euclídeo, constituido por $\mathbf{R}^n$ y la métrica euclídea usual:

$$d(x, y) = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} (x_i - y_i)^2} \, .$$

Donde, $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$, $y = (y_1, y_2, \ldots, y_n)$.

También puede definirse métricas en subconjuntos M de $\mathbf{R}^3$, como por ejemplo en la esfera hueca, centrada en el origen y radio $R > 0$, cuya definición analítica es:

$$S_R^2 = \{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 = R^2\}.$$

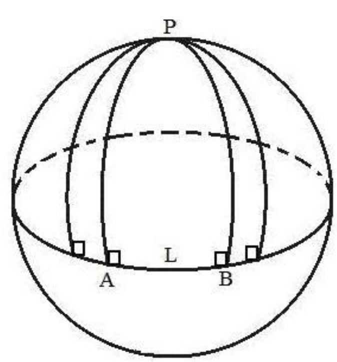

Fig. 1

Esta superficie, también conocida como "2-esfera", es un ejemplo, (entre los más sencillos, después de la recta y la circunferencia), de ciertos objetos topológicos introducidos por Bernhard Riemann (1826-1866), que se denominan *variedades* (o *manifolds,* en inglés). Una buena referencia para estos temas es el capítulo 1 del libro de S. S. Chern [1].
En topología se entiende por variedad n-dimensional, un espacio de Hausdorff, segundo contable, para el cual, toda vecindad de un punto de la variedad es homeomórfica a una n-esfera abierta del espacio euclídeo $\mathbf{R}^n$.

Una superficie como S_R^2 , sirve para modelar la superficie de la tierra. Aquí la distancia entre dos puntos x e y, se calcula usando la longitud de la geodésica que une a estos puntos. Las curvas que unen dos puntos, de tal forma que su longitud sea mínima, se llaman geodésicas. En la 2-esfera, las geodésicas corresponden a arcos de *circunferencias máximas*. Circunferencias máximas son circunferencias que resultan de la intersección de la superficie esférica con planos que pasan por el centro de la esfera. Más adelante daremos fórmulas explícitas que definen esta distancia. Las "rectas" en la 2-esfera corresponden a circunferencias máximas. Se observa que las perpendiculares (Figura 1), a una recta se interceptan en un punto (para el caso de la figura, en el polo norte). La geometría inducida por la métrica que daremos para S_R^2 es riemanniana, con una característica muy especial: no hay rectas paralelas.

3. – Proyecciones y Métricas.

Una proyección cartográfica de un subconjunto abierto U de la esfera S_R^2, en el plano $\mathbf{R}^2$, es una función, X: U $\to \mathbf{R}^2$, donde X es tal que:

i) X es uno a uno,

ii) X es diferenciable y

iii) X tiene inversa diferenciable.

Funciones de este tipo se conocen como difeomorfismos. Una aplicación conocida de este tipo, es la aplicación introducida por Gerardus Mercator en 1569, usada en cartografía para hacer levantamiento de mapas de regiones de la tierra. La definición de proyección cartográfica puede extenderse, desde luego, a superficies S más generales como, toros o variedades de otras dimensiones.

La imagen de U en $\mathbf{R}^2$ por una proyección de este tipo, se llama un mapa cartográfico o un atlas de la superficie considerada. Para deducir aspectos geométricos de la superficie S_R^2 o de una de sus partes U, debemos analizar sus versiones planares, o sean sus mapas, X (U) en $\mathbf{R}^2$, donde X es una función con las características arriba mencionadas. A través de la proyección cartográfica llevamos los rasgos geométricos que nos interesan de U al plano, y es allí donde los estudiamos para deducir características a veces difíciles de estudiar directamente en la superficie, como son: medidas de longitud, áreas de regiones, ángulos entre curvas, etc. La medida geométrica básica de una curva es su longitud, y ésta puede calcularse si conocemos la métrica que rige la proyección de la curva en $\mathbf{R}^2$. Generalmente los atlas traen las escalas que permiten calcular distancias en los mapas a fin de estimar esas mismas distancias en la superficie "mapeada". La escala común viene en kilómetros, o en millas estatutarias que recuerdan la proyección de Mercator. La métrica asigna a cada punto de X(U) un producto interno con el cual la longitud de los vectores tangentes y los ángulos entre vectores tangentes en el plano se pueden determinar, como si ellos fueran las curvas correspondientes sobre la superficie y fueran medidas allá.

Fue Eugenio Beltrami (1835-1900) quien probó que la condición para que existan proyecciones definidas en la variedad que conviertan geodésicas en rectas sobre el plano es que, la superficie tenga curvatura constante. Consecuencia de este trabajo fue el hecho de considerar superficies de curvatura negativa pero constantes, lo que le condujo a resultados interesantes en 1868, algunos de los cuales intentaremos describir aquí.

Normalmente una métrica ds, en S^2_R se representa en la siguiente forma:

$$ds^2 = E(u, v)\,du^2 + 2F(u, v)\,du\,dv + G(u, v)\,dv^2$$

Con lo cual estamos significando, que la longitud s de la curva $\alpha : [t_0, t_1] \to U$ queda determinada por la integral,

$$\int_{t_0}^{t_1} \sqrt{E(u(t), v(t))\left(\frac{du}{dt}\right)^2 + 2F(u(t), v(t))\frac{du}{dt}\frac{dv}{dt} + G(u(t), v(t))\left(\frac{dv}{dt}\right)^2}\,dt$$

Donde $(u(t), v(t)) = X \circ \alpha(t)$. Aquí $X \circ \alpha(t)$, corresponde a la función X calculada en el radio vector $\alpha(t)$ que traza la curva cuando t recorre el intervalo $[t_0\ ,\ t_1]$. Hemos encerrado en círculos los diferenciales para resaltar el rol que juega la *medida* en la definición de métrica: aquí la métrica *ds*, es la medida del arco de curva en términos de las medidas diferenciales *du, dv* y *dt.* Cuando la superficie es un subconjunto de $\mathbf{R}^3$, las funciones componentes de la métrica se calculan de la proyección a través de ciertos productos internos en $\mathbf{R}^3$. Más exactamente para proyecciones de la esfera se tiene:

$$E(u, v) = \frac{\partial X^{-1}}{\partial u} \cdot \frac{\partial X^{-1}}{\partial u}, \quad F(u, v) = \frac{\partial X^{-1}}{\partial u} \cdot \frac{\partial X^{-1}}{\partial v}, \quad G(u, v) = \frac{\partial X^{-1}}{\partial v} \cdot \frac{\partial X^{-1}}{\partial v}$$

Para describir una superficie abstracta, simplemente eliminamos el dominio de la proyección. Esto es, se nos da una colección (el atlas) de coordenadas cartográficas o proyecciones, junto con la métrica (las escalas) que determinan localmente la geometría, es decir la forma de medir en cada mapa. Se entiende que en sectores donde hay traslapamientos, las medidas deben coincidir, condición que la va hacer precisa las reglas de transformación propias de la geometría diferencial. Para detalles sobre estos temas puede verse el libro de S. S. Chern [1].

Aquí nos interesa una proyección particular de la esfera S^2_R, que se define en el hemisferio sur, digamos, $U = \{(x, y, z) \in S^2_R : z < 0\}$. Proyectamos U sobre el plano $T = \{(x, y, -R) \in \mathbf{R}^3\}$, tangente a la semiesfera en el polo sur, llevando una recta desde el centro de la esfera, tocando la superficie U en un punto hasta llegar al plano T, como se ve en la figura 2. Una proyección de este tipo se llama proyección central o "gnómica" y está dada por:

$$X(\lambda, \phi) = (-R\cos(\lambda)\cot(\phi), -R\,\mathrm{sen}(\lambda)\cot(\phi)),$$

donde hemos identificado T con $\mathbf{R}^2$, al ignorar a la coordinada en *z*. Así damos a la esfera sus coordenadas geográficas, su longitud λ en $(-\pi, \pi)$ y su latitud ϕ en $(-\pi/2, 0)$. Los puntos del hemisferio norte quedarán también determinados al hacer énfasis en que la latitud es norte, al igual que lo hacemos en geografía terrestre.

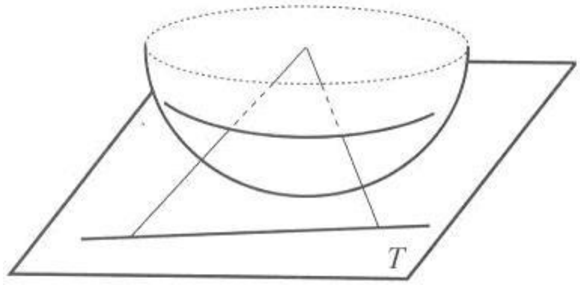

Fig. 2

4. El Programa de Beltrami

La proyección central goza de una propiedad muy interesante: las geodésicas sobre la esfera, esto es, las circunferencias máximas (o arcos de éstas), se convierten por virtud de la proyección, en rectas o en segmentos de rectas en el plano. Esto hace que la navegación parezca sencilla usando el recurso de esta proyección por cuanto que la trayectoria de menor longitud en la esfera, corresponde en el plano, o en el mapa, a una trayectoria rectilínea. Eugenio Beltrami, se propuso el problema de determinar la existencia de una superficie, para la cual, una proyección lleva, geodésicas, a líneas rectas en el plano. Su prueba lo condujo a que si esa superficie existe, ésta debe tener curvatura constante. Cuando la curvatura es positiva, las esferas S^2_R son los ejemplos estándar.

La métrica que aparece usando la proyección central está dada por:

$$ds^2 = R^2 \frac{(R^2+v^2)\,du^2 - 2uv\,du\,dv + (R^2+u^2)\,dv^2}{(R^2+u^2+v^2)^2}$$

Tomando q = $1/R^2$ (la curvatura), ds toma la forma:

$$ds^2 = \frac{(1+qv^2)\,du^2 - 2quv\,du\,dv + (1+qu^2)\,dv^2}{(1+qu^2+qv^2)^2} \qquad (\mathbf{1})$$

Ahora supongamos que hacemos variar q sobre **R**. Cuando $q > 0$, la geometría que encontramos es la geometría de la esfera de radio $1/\sqrt{q}$. Cuando $q = 0$, encontramos $ds^2 = du^2 + dv^2$, que corresponde a la métrica euclídea. Cuando $q < 0$, Beltrami encontraría algo nuevo: una proyección cartográfica que no correspondía a una superficie concreta.

5. – Definición del *q-plano* y la noción de longitud.

El *q-plano* es el subconjunto $\mathbf{D}_q$ de $\mathbf{R}^2$ dado por

$$\mathbf{D}_q = \{(u,v) : 1 + qu^2 + qv^2 > 0\},$$

dotado de la métrica (1).

Cuando $q < 0$, se encuentra el disco abierto de radio $1/\sqrt{-q}$, centrado en (0 , 0); para $q \geq 0$, $\mathbf{D}_q = \mathbf{R}^2$, el plano euclídeo. Para cada escogencia de q, las rectas euclídeas en $\mathbf{D}_q$ corresponden a geodésicas en la geometría determinada por ds^2.

Vamos a hacer un poco de trigonometría en $\mathbf{D}_q$, comenzando con los triángulos rectángulos. El problema básico de la trigonometría es la llamada *resolución de triángulos*, donde se trata de determinar las relaciones de los ángulos y los lados del triángulo. Es de destacar que entre las primeras áreas de las matemáticas en desarrollarse, estuvo la trigonometría esférica, en razón al hecho de que ésta tiene mucho que ver con astronomía. Fue por ello que la cultura babilonia desde el II milenio antes de Cristo se interesó en estos temas. La trigonometría esférica, sin embargo, fue tratada sistemáticamente por Leonhard Euler (1707-1783), quien fijó, desde esa época los métodos usados para la resolución de triángulos esféricos. La resolución de triángulos esféricos corresponde al problema de encontrar tres datos desconocidos, cuando se conocen los tres datos restantes relacionados con lados o ángulos de un triángulo esférico.

Queremos estudiar el triángulo rectángulo en el plano $\mathbf{D}_q$ y en relación con la métrica ds definida en (1). Para obtener las longitudes de los lados de un triángulo rectángulo supondremos que su comportamiento geométrico es invariable en todo $\mathbf{D}_q$, lo que nos permite escoger un triángulo convenientemente situado, por ejemplo, aquel que tenga uno de sus vértices en el el origen del plano (u, v) y uno de sus catetos en el eje u, como se muestra en la figura 3.

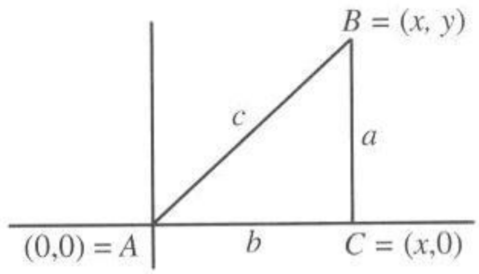

Fig. 3

Lo primero a confirmar es que el triángulo es, en efecto, un triángulo rectángulo en **D**q. El ángulo en C está formado por segmentos que vienen de curvas coordenadas, es decir, de curvas del tipo u ? (u, 0) y v ? (x, v). El ángulo entre las dos curvas puede leerse directamente de la métrica: el coseno del ángulo formado por las curvas coordenadas viene dado por $F/\sqrt{EG}$ y $F = -quv/(1 - u^2 - v^2)$. Puesto que $v = 0$ en C, estas curvas se interceptan en ángulo recto. En segundo lugar determinamos la longitud de los lados. Parametrizamos AC como la curva $\beta(t) = (t, 0)$, con $0 \leq t \leq x$. $d\beta / dt = (1, 0)$, $ds = (1 + qt^2)^{-1}/dt$ y obtenemos

$$b = \int_0^x \frac{dt}{1 + qt^2}$$

Para el lado BC, sea $\alpha(t) = (x, t)$, $0 \leq t \leq y$. Entonces $d\alpha / dt = (0, 1)$.

Y, $ds = \sqrt{1+qx^2}\, dt/(1+qx^2+qt^2)$. De donde se sigue que

$$a=\int_0^y \frac{\sqrt{1+qx^2}}{1+qx^2+qt^2}\,dt=\int_0^y \frac{d\left(t/\sqrt{1+qx^2}\right)}{1+q\left(t/\sqrt{1+qx^2}\right)^2}=\int_0^{y/\sqrt{1+qx^2}} \frac{dt}{1+qt^2}$$

Finalmente para el lado AB, sea $\gamma(t) = (tx, ty)$ con $0 \le t \le 1$. Entonces $d\gamma/dt = (x, y)$, y

$$c=\int_0^1 \sqrt{\frac{(1+qt^2y^2)x^2-2qt^2x^2y^2+(1+qt^2x^2)y^2}{(1+qt^2x^2+qt^2y^2)^2}}\,dt$$

$$=\int_0^1 \frac{\sqrt{x^2+y^2}\,dt}{1+q(x^2+y^2)t^2}=\int_0^1 \frac{d(\sqrt{x^2+y^2}\,t)}{1+q(\sqrt{x^2+y^2}\,t)^2}=\int_0^{\sqrt{x^2+y^2}} \frac{1}{1+qt^2}\,dt.$$

En todos los casos aparece la integral $\int_0^r (1+qt^2)^{-1}dt$. La teoría de funciones elípticas sugiere introducir una nueva función.

5 Funciones elípticas y el teorema de Pitágoras.

Sea s un número real, definimos la función $\tau_q(s)$, implícitamente a través de la ecuación:

$$s=\int_0^{\tau_q(s)} \frac{dt}{1+qt^2}$$

Para el triángulo rectángulo ABC, la definición nos da

$$\tau_q(b)=x, \quad \tau_q(a)=\frac{y}{\sqrt{1+qx^2}}, \quad \tau_q(c)=\sqrt{x^2+y^2} \qquad (2)$$

$\tau_q(s)$ juega el rol de la función tangente en $\mathbf{D}_q$. Podemos introducir las otras funciones análogas a las funciones trigonométricas, explorando las propiedades de $\tau_q(s)$. La primera propiedad que encontramos se deriva de la aplicación del teorema fundamental de cálculo:

$$d\,\tau_q(s)/ds = 1 + q\,\tau^2_q(s).$$

Por analogía con $d/ds\,(\tan s) = \sec^2 s$, introducimos las siguientes funciones $\xi_q(s)$ y $\sigma_q(s)$,

$$\xi_q(s) = \frac{1}{\sqrt{1+q\tau_q^2(s)}}, \qquad \sigma_q(s) = \tau_q(s)\xi_q(s)$$

De la definición se sigue

$$1 = \xi_q^2(s)(1+q\tau_q^2(s)) = \xi_q^2(s) + q\sigma_q^2(s)$$

EL TEOREMA DE PITÁGORAS.

Supongamos que el triángulo ABC es un triángulo rectángulo en $\mathbf{D}_q$ con su ángulo recto en C. Si la longitud de los lados opuestos a los vértices A, B y C, son a, b y c, entonces

$$\xi_q(c) = \xi_q(a)\xi_q(b)$$

Demostración. Por la definición, se tiene:

$$\xi_q(c) = \frac{1}{\sqrt{1+q\tau_q^2(c)}} = \frac{1}{\sqrt{1+q(x^2+y^2)}}.$$

Puesto que

$$1+qx^2+qy^2 = (1+qx^2)\left(1+q\left(\frac{y}{\sqrt{1+qx^2}}\right)^2\right) = \frac{1}{\xi_q^2(b)\xi_q^2(a)}$$

De lo cual se sigue que:

$$\xi_q(c) = \xi_q(a)\xi_q(b)$$

Para relacionar esta expresión con el tradicional teorema de Pitágoras, vamos a considerar qué ocurre cuando q tiende a cero. Usando series infinitas, podemos escribir:

$$b = \int_0^x \frac{dt}{1+qt^2} = \int_0^x [1 - qt^2 + q^2t^4 - \cdots]\,dt = x - q\frac{x^3}{3} + q^2\frac{x^5}{5} - \cdots.$$

Por lo tanto $b^2 = x^2 - q(2x^4/3 + \ldots)$.

Usando los valores de a y c dados por:

$$a = \int_0^{y/\sqrt{1+qx^2}} (1+qt^2)^{-1}\,dt \qquad\qquad c = \int_0^{\sqrt{x^2+y^2}} (1+qt^2)^{-1}\,dt,$$

Expandiendo el denominador e integrando las series, llegamos a que

$$a^2 = \frac{y^2}{1+qx^2} - q\left(\frac{2y^4}{3(1+qx^2)^2} + \cdots\right)$$

$$c^2 = x^2 + y^2 + q((x^2+y^2)^{3/2}/3 + \cdots).$$

Haciendo tender q a cero se obtiene

$$a^2 + b^2 \to x^2 + y^2 \qquad\qquad c^2 \to x^2 + y^2$$

De donde se sigue $a^2 + b^2 = c^2$, el conocido teorema de Pitágoras.

6. – Valores particulares. Aquí las variables están relacionadas según la figura 3.

Trigonometría Esférica (q = 1)

$$\cos(c) = \cos(a)\cos(b)$$
$$\tan(b) = \cos(\angle A)\tan(c)$$
$$\sin(\angle A)\cos(b)\tan(c) = \tan(a)$$
$$\tan(\angle A)\sin(b) = \tan(a)$$
$$\frac{\sin(\angle A)}{\sin(a)} = \frac{\sin(\angle B)}{\sin(b)} = \frac{1}{\sin(c)}$$
$$\text{area}(\triangle ABC) = \angle A + \angle B - \pi/2$$
$$\cos(a) = \cos(b)\cos(c) + \sin(b)\sin(c)\cos(\angle A)$$

Trigonometría Hiperbólica (q = -1)

$$\cosh(c) = \cosh(a)\cosh(b)$$
$$\tanh(b) = \cos(\angle A)\tanh(c)$$
$$\sin(\angle A)\cosh(b)\tanh(c) = \tanh(a)$$
$$\tan(\angle A)\sinh(b) = \tanh(a)$$
$$\frac{\sin(\angle A)}{\sinh(a)} = \frac{\sin(\angle B)}{\sinh(b)} = \frac{1}{\sinh(c)}$$
$$\text{area}(\triangle ABC) = \pi/2 - \angle A - \angle B$$
$$\cosh(a) = \cosh(b)\cosh(c) - \sinh(b)\sinh(c)\cos(\angle A)$$

BIBLIOGRAFIA

1. – CHERN, S. S. et al. *Lectures on Differential Geometry.* Series on University Mathematics, Vol. 1. World Scientific. Singapore. 1999.

2. – FEFERMAN, A. B. et al. *Alfred Tarski. Life and Logic.* Cambridge University Press. New York. 2005. Pág. 49 y sigts.

3. – McCLEARY, J. *Trigonometries*. The American Mathematical Monthly. Vol. 109. No. 7. August – September 2002.

4. – ROYDEN, H. L. *Real Analysis. 2nd. Edition.* The Macmillan Company. Toronto. 1968.