Visita Breve a Historia de un Gran Problema. La Hipótesis del Continuo

Diego Pareja Heredia[1]. *Universidad del Quindío*

"Para descubrir algo en matemáticas, hay que superar las inhibiciones y la tradición. No podemos vencer barreras, sin ser subversivos". Laurent Schwartz.

"Después de más de dos mil años de continua refutación, las paradojas de Zenón, se restablecen, para convertirse en fundamento de un renacer de las matemáticas". B. Russell.

Nota introductoria.
El presente trabajo es una recopilación de apartes de exposiciones hechas en el curso de *Epistemología de las matemáticas* y de artículos publicados en *La Crónica del Quindío* o que están para publicarse en la revista *Lecturas Matemáticas* de la Sociedad Colombiana de Matemáticas. Gran parte del contenido, es tomado de notas de clase, y por lo tanto, no pretenden originalidad. Lo que tiene que ver con la obra de Gödel se tomó de un artículo de Martin Davis y de la obra de Solomon Feferman, citados al final en la bibliografía.

1 Antecedentes históricos.

1.1 Introducción

Hay quienes incluyen a las matemáticas como un arte. Una figura emblemática en las matemáticas del siglo XX, como fue Saunders Mac Lane (1909, 2005), es de ese parecer. El arte como creación humana nace y permanece a través del tiempo para disfrute y admiración de las generaciones que, suceden a la del creador artístico. Esto significa que la obra de arte debe su existencia al artista. Obras como la quinta sinfonía en do menor opus 67, no habría existido jamás, de no ser por Ludwig van Beethoven, quien la compuso, o la Mona Lisa, aquella obra magistral, no estaría colgada en algún museo, si el genio de Leonardo Da Vinci, no la hubiera plasmado en el óleo. El caso de la ciencia es diferente. Al descubrimiento de la ley de la gravedad, por ejemplo, el hombre debió llegar con o sin Isaac Newton. La labor inquisitiva del científico es la búsqueda de las leyes naturales o de los patrones de comportamiento del medio que lo rodea para tratar de descubrir las leyes que subyacen detrás de esos patrones.

Si las corrientes matemáticas del siglo XIX y XX hubieran seguido el curso trazado por matemáticos como Leopold Kronecker y L. E. J. Brouwer y no por los senderos que Cantor y Hilbert nos delinearon, no hay duda de que las matemáticas de nuestro tiempo, no tendrían ese sello que las caracteriza hoy: su gran andamiaje conjuntista. En efecto las matemáticas que hoy crecen a pasos agigantados tienen ese cariz pleno de fundamentación en la teoría de conjuntos. Un conjunto, trabajado a diario por los matemáticos, es el conjunto $\mathbb{R}$ de los números reales. Domeñar este conjunto ha sido el propósito de muchas generaciones de matemáticos, comenzando con Georg Cantor, quien se propuso como meta contar sus elementos. Después de mucho trabajo, llega a la conclusión de que es imposible contarlos con el recurso de los números naturales, o con los racionales, y aun, ni siquiera con el conjunto de los números algebraicos que contiene a todos los anteriores, y además a irracionales, entre otros los que tienen la forma $\sqrt{n}$. Frente a esa

[1] Notas para una charla, presentada en el Seminario Interno de Matemáticas en la Universidad del Quindío. Marzo 6 de 2007. Rectificaciones en Octubre de 2014.

situación buscó el camino de la hipótesis, al proponer una nueva teoría: *la teoría de los cardinales transfinitos*, en la cual, asigna el menor de ellos $\aleph_0$, a los conjuntos **N**, **Z**, **Q**, y al conjunto de los números algebraicos.

La teoría de conjuntos moderna, sigue en este aspecto el legado de Cantor con relación a cómo se ordenan los cardinales transfinitos: $\aleph_0$, $\aleph_1$, $\aleph_2$, … . Aquí indudablemente, hay ya, una "gruesa" hipótesis, como es la de tomar por conjunto de índices a un conjunto enumerable: el conjunto de los números naturales, 0, 1, 2,… Es decir, Cantor de entrada, bien ordenó los cardinales transfinitos. El conjunto de todas las sucesiones infinitas con elementos tomados de {0, 1}, reproduce al conjunto de números reales en el intervalo [0, 1][2]. Lo que quiere decir que, la potencia de **R** (el número de elementos de **R**) es $2^{\aleph_0}$. Hasta allí bien. Pero suponer que este cardinal sea, exactamente el siguiente en el orden lineal, es un salto al vacío. Y en ese salto seguimos desde cuando el matemático alemán propuso la hipótesis de que el siguiente cardinal transfinito después de $\aleph_0$, tenía que ser el cardinal de los números reales. Simbólicamente:

$$2^{\aleph_0} = \aleph_1$$

Hipótesis del Continuo

Cantor denotó por $\aleph_0$, $\aleph_1$, $\aleph_2$, …, el conjunto de todos los cardinales transfinitos, donde $\aleph_0$, el cardinal de los números naturales, es el menor de todos ellos. Cantor ordena estos cardinales con el orden "<", el mismo, con que se ordena a los naturales, para obtener: $\aleph_0 < \aleph_1 < \aleph_2 < \ldots < \aleph_\alpha < \ldots$ Cantor, de entrada, bien ordenó los cardinales transfinitos. Es decir entre dos de ellos no existe ningún otro; como entre 1 y 2 no hay ningún natural.

Es costumbre denotar con *c*, el cardinal del continuo, que según Hilbert, es el mismo que el de los números reales. Así la hipótesis del continuo se reduciría a la igualdad:

$$c = \aleph_1.$$

Otra forma de enunciar la Hipótesis del Continuo

En la formulación que el mismo Hilbert hace[3], da por sentado un hecho que debe llamarnos a la reflexión, y al que me referiré en detalle más adelante: *la identificación del conjunto de los números reales con el continuo*. Esto es, simple y llanamente, tomar a priori la posibilidad de establecer una correspondencia uno a uno y sobre (una biyección), de los números reales con los puntos de la recta. ¿Es esta identificación legítima? ¿Cómo podría definirse esta biyección o correspondencia de **R** y una recta, ¡un ente geométrico, que ni siquiera sabemos qué es!? Estos interrogantes lo retomaremos en la parte final de esta disertación.

[2] En efecto, 0 = 0.000 …, 1 = 0. 111 …. Cualquier número entre cero y uno se puede expresar como sucesión infinita en forma binaria, usando sólo 0´s y 1´s. Volveremos a esta idea más adelante.

[3] Copia de este discurso fue publicado inicialmente en Gotinga, luego, traducido al inglés por Mary Winston Newson para ser publicado en el *Bulletin* de la *American Mathematical Society* (AMS) en 1902. Una republicación se hizo en el Vol. 37 No. 4 de Octubre de 2000 de la misma revista.

1.2 – Demócrito y los orígenes de los infinitesimales.

No hay acuerdo entre los estudiosos de la obra de Demócrito de Abdera (460-370 A. C.), en cuanto a sus contribuciones a las matemáticas. Su obra ha llegado a nosotros a través de filósofos que le sucedieron, como Aristóteles, o de historiadores como Diógenes Laercio (siglo II AD). Por referencias sabemos de su teoría atomista, para explicar los fenómenos del mundo que nos rodea. Su concepción filosófica concibe al espacio y al vacío (la *nada*, el *no ser*) con todo derecho a coexistir al lado del *ser*. En ese espacio están los infinitos átomos que constituyen la realidad física, nuestro mundo. Estos átomos son absolutamente pequeños, indivisibles, eternos y que llenan *completamente* el espacio que ocupan. Esta teoría atomista nos lleva a imaginar la posibilidad de llenar en forma plena el espacio, con un agregado indefinido de átomos. Su teoría física de la constitución del mundo, involucra un aspecto cuantitativo en el que juega un importante rol, las leyes matemáticas, ya conocidas por el legendario matemático Pitágoras.

Demócrito, como Tales, fue un conocedor de toda la sabiduría de su tiempo. Y al igual que el sabio de Mileto, concibió el comportamiento del mundo como una máquina que se mueve según complejos mecanismos, ajenos a toda influencia de seres sobrenaturales. Su teoría cosmogónica es, en cierto aspecto, antecesora de las modernas teorías físicas, en el sentido de considerar la materia y la energía perennes e indestructibles. Los átomos son eternos, al igual que el movimiento, decía. Según Diógenes Laercio, Demócrito escribió varias obras relacionadas con aritmética y geometría. Posiblemente antecedió a Eudoxio en el estudio de los números irracionales y a Arquímedes en el método exhaustivo que anticipó, lo que vendría a ser el cálculo integral. Según otras fuentes Demócrito se anticipó a la teoría de los indivisibles propuesta por Cavalieri en el siglo XVII. Parece ser, al menos en la concepción de Thomas L. Heath[4], que Demócrito concibió la diferencia entre el *continuo geométrico* y la *realidad física discreta*, esta última encuadrada en su sistema atómico. Siguiendo a Plutarco, quien cita al estoico Crisipo, Demócrito propuso el siguiente dilema:

> *Si un cono se corta con un plano paralelo* (a una altura de un átomo, digamos) *cercano a la base, ¿qué podemos decir de las superficies que resultan después de hecho el corte? ¿Son, o no son iguales? Si no lo son, estamos mostrando que el cono está formado por secciones que no coinciden una con la siguiente y así el cono se mostraría como algo irregular en su superficie, contrariamente a como lo concebimos: liso. De otro lado, si las superficies son iguales no hallaremos ninguna diferencia entre este cono y un cilindro. Esto nos lleva a la conclusión de que, el cono es un sólido que está constituido por círculos iguales y desiguales, lo que es absurdo.*[5]

Esta cita muestra cómo Demócrito se anticipa con su enfoque infinitesimal, no solamente a Cavalieri, sino también a Eudoxio y a Arquímedes que recurrieron al método exhaustivo para probar resultados geométricos, que hoy los comprobamos con el uso del cálculo integral. La existencia de los infinitesimales, sólo vino a justificarse el siglo pasado con los trabajos de Abraham Robinson, particularmente con su obra *Non-standard Analysis* de 1966, en la que propone un modelo no arquimediano para los números reales.

---

[4] Así lo deja entrever Thomas L. Heath en su clásica obra History of Greek Mathematics.

[5] Tomada de: http://www-groups.dcs.st-and.ac.uk/~history/Biographies/Democritus.html

1.3 – Las paradojas de Zenón de Elea. Argumentación por densidad.

Zenón de Elea (490-425 A. C.) propuso, según el comentarista Proclo (411-485 AD), cuarenta paradojas relacionadas con el continuo y el movimiento, que vistas retrospectivamente han desempeñado un papel importante en las matemáticas desde tiempos griegos. Las más conocidas son: la de Aquiles y la tortuga, la de la flecha, la del corredor, y una cuarta que tiene que ver con la argumentación por densidad. Esta última es la menos conocida entre nosotros y a ella me referiré más adelante.

En palabras de Proclo:

Zenón propuso cuarenta diferentes paradojas que se derivan de la asunción de la pluralidad y del movimiento, todas ellas aparentemente fundamentadas en las dificultades originadas en el análisis del continuo.

Para el tiempo en que vivió Zenón se atacaba duramente la filosofía "monista" defendida por su maestro Parménides. Para esta corriente filosófica el *ser* era, *uno e indivisible* y el movimiento era imposible. Los ataques venían de quienes sostenían por un lado la teoría atomista y de otro lado, por aquellos que sostenían, la indefinida divisibilidad de la unidad. Zenón mostró a sus contemporáneos, que calificaban como contra evidentes las teorías de Parménides, que a iguales contra evidencias se llega asumiendo la veracidad de sus respectivas teorías.

La paradoja de la flecha se soporta en la asunción de que, el espacio está constituido por unidades adyacentes, indivisibles, y el tiempo como una suma de instantes, igualmente indivisibles. Zenón invita a imaginar una flecha en vuelo. Al estar el tiempo dividido en instantes, la flecha en un instante dado, estará en un punto especifico del espacio, y no en otro; en ese instante la flecha no se diferencia en nada, de una flecha en reposo, pero esto ocurre en cada instante, es decir, la flecha esta quieta en cada instante y Zenón se pregunta entonces, ¿cuándo es que la flecha vuela o se mueve?

Lo que busca Zenón, es mostrar a sus contemporáneos (y a nosotros también) que los conceptos de espacio y tiempo no habían sido, bien entendidos. Al asumir la hipótesis contraria, de que el tiempo y el espacio son infinitamente divisibles llega a la conclusión de que Aquiles, el veloz héroe griego, no es capaz de sobrepasar, a una lenta tortuga. Su razonamiento empieza en suponer que la tortuga lleva una ventaja al iniciar la carrera, cuya ventaja se mantendrá indefinidamente porque cada vez que Aquiles llegue al punto donde la tortuga estuvo, ella misma ya se habrá desplazado adelante. Este proceso se repite hasta el infinito, y así la tortuga estará siempre adelante, aunque con ventaja cada vez menor.

Las paradojas anteriores no buscan realmente negar situaciones de hecho. El movimiento se comprueba, moviéndose. Es un hecho real. A lo que apuntaba Zenón era a mostrar que el continuo, el soporte del movimiento, no había sido bien comprendido. Que las dos únicas formas de mirarlo en su tiempo, o como referido a suma discreta de puntos (átomos) o como un agregado cada vez mayor de unidades divisibles indefinidamente, conducían a situaciones contradictorias.

De acuerdo al comentador Simplicio, Zenón propone la siguiente argumentación para atacar la multiplicidad. Si hay muchas cosas, esas muchas, deben ser tantas que no sean ni más ni menos que las que son. Pero si hay tantas como se dicen ser, esas tantas cosas, deben estar limitadas. Pero si están limitadas habrá otras cosas entre ellas que las separen; y entre éstas, otras, y otras y así *ad infinitum*. Por lo cual las cosas que son, deben ser ilimitadas.

Este cuestionamiento de la multiplicidad, nos permite reflexionar sobre cómo ver el continuo. O como una multiplicidad de puntos, o, como una unidad en el sentido monista de Parménides. La tradición matemática desde los tiempos de Descartes nos permite concebir el continuo como un agregado de puntos, entendidos estos, sin dimensión, como puntos en una recta, y que no tienen función distinta a la de marcar una posición en la recta. Pero aun así, si no son más que marcas ajenas a la recta, entonces ¿de que está constituida la recta? Traemos, como dije, una preconcepción de que el continuo es la "recta real" y vemos cómo, desde hace más de dos mil años, las paradojas están a medio camino de resolverse. Entonces debemos aventurarnos a mirar al continuo desde otra óptica, que no sea la tradicional.

En las paradojas de Zenón está de presente, de un lado el problema del movimiento y de otro lado el caso de la multiplicidad. La forma de apreciar el movimiento con nuestros sentidos es a través de su traza, esto es, mirando la huella que deja. En este caso su huella es, un segmento de recta o un trozo de curva. Aquí si ya vemos el continuo representado en algo geométrico, pero tenemos que detenernos a pensar que lo que vemos, no es sino una huella dejada por el movimiento, no el movimiento mismo. Entonces viene el interrogante mayor, ¿qué es, entonces, el movimiento? *Lo único continuo, aquello, no susceptible a la división en partes, lo permanente*. Todo lo demás es apariencia efímera; que va a depender del sujeto que la observa. Así pues, hemos llegado al problema filosófico en el que estuvo imbuido Heráclito, aquel filósofo griego que sostenía que nadie se baña dos veces en el mismo río. Por lo tanto centrémonos en el problema del movimiento, con el ánimo de hacer alguna aproximación provechosa al problema del continuo.

Decíamos arriba que del movimiento veíamos su traza. Estudiemos entonces desprevenidamente, qué será esa traza o huella que deja el movimiento. Desde el punto de vista físico, en el plano mecanicista de Galileo y Newton, el movimiento de un móvil se puede asociar ahora si a una expresión matemática que lo describa. El movimiento está relacionado con el tiempo y hablamos de que algo se mueve, cuando ese algo pasa de ocupar una posición S a una posición T, cuando el tiempo pasa de t_1 a t_2. Es entonces la continuidad del tiempo la que se transfiere a la traza, que deja el tránsito de S a T. Concluimos entonces, que si queremos saber algo del continuo hay que estudiar el tiempo. Y aquí aparece el gran obstáculo, ¿cómo abordar algo inasible, como es el tiempo? Los números reales son algo estático. Una creación humana, como dijo Kronecker, "*Dios creó los números naturales, todo lo demás es obra del hombre"* o también: "*0 y 1 es intuición, lo demás es obra de los matemáticos*". En cambio, el tiempo es ajeno a la existencia del hombre, es algo que fluye, no sabemos hasta cuando, y que en apariencia no da marcha atrás. Nuestra percepción del presente, es la pequeña e insondable fracción de tiempo que nos toca y va a perderse en las profundidades del pasado. Ese tránsito del pasado al futuro es tan vertiginoso que no hay forma de medirlo. ¿Tal vez con un reloj atómico? ¿Midiendo las pulsaciones de un campo magnético perturbado por el paso de un electrón, tal vez? Pero las pulsaciones siguen referidas al tiempo y así habrá que buscar otro patrón de medida que refine nuestra apreciación. De este modo podemos continuar, *ad infinitum.*

Lo anterior nos pone a pensar sobre la magnitud de la duración del presente absoluto. Queda sobre nosotros la duda si, ese presente del que hablamos arriba se puede estimar usando números reales. Posiblemente si; usando infinitesimales, como lo hacemos en cálculo. Pero entonces, ¿dónde ponemos, los infinitesimales en la llamada recta real? Decíamos al principio que Abraham Robinson los acomodó en un modelo no estándar: los hiperreales, donde caben números infinitamente grandes e infinitamente pequeños, como son los infinitesimales. Pero aún así, el tiempo, quedaría discretizado y volvemos a la paradoja de la flecha propuesta por Zenón. De aquí nos vemos forzados a salir, a dar un gran salto. Debemos atrevernos a pensar si lo dinámico como es el tiempo, se podrá encasillar como lo queremos hacer, en un modelo estático como es la llamada recta real.

1.4 – Paradoja de Galileo. Los indivisibles de Cavalieri.

Galileo fue un personaje inquisidor de las ciencias, al contrario de los que fueron sus perseguidores, unos inquisidores religiosos. Fue así como encontró una paradoja al observar los números naturales y sus respectivos cuadrados. El conjunto de todos los enteros positivos, cuadrados y no cuadrados, debería ser "mayor" que el conjunto de los cuadrados. Sin embargo, notó que los dos conjuntos podían ponerse en una correspondencia uno a uno (biunívoca), así:

$$\begin{array}{cccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & \ldots & n \ \ldots \\ \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & & \updownarrow \\ 1 & 4 & 9 & 16 & \ldots & n^2 \ldots \end{array}$$

Con esto estaba probando que a los conjuntos infinitos no se les puede aplicar la relación de orden "mayor que", porque según la correspondencia mostrada, hay tantos cuadrados como enteros positivos hay. Esta extraña propiedad de que un subconjunto propio de otro, tenga igual número de elementos, que el conjunto que lo contiene, se convierte en la característica que identifica a los conjuntos infinitos.

Para el tiempo de Galileo el estudio de los números reales estaba en una etapa embrionaria y habría que esperar hasta Cantor para poder dar el salto que permitiera aplicar una relación de orden parecida, que permitiera comparar conjuntos infinitos. La idea de Cantor fue decidir que un conjunto es mayor que otro, cuando entre los dos no hay posibilidad de establecer una correspondencia biunívoca. Así fue cómo, Cantor probó que los números reales son más numerosos que los números naturales, probando que en efecto, esta correspondencia no puede darse entre estos dos conjuntos. Este hecho lo expresamos diciendo que el conjunto de los números reales son "no enumerables".

La relación de orden aludida, busca establecer un orden en la clase de todos los conjuntos infinitos, algo similar a lo que hacemos con conjuntos finitos. Como vimos en la sección 1.1 Cantor ordenó los conjuntos infinitos con la misma relación de orden "$<$" con que se bien ordena a los números naturales. Un buen orden, como "$<$", en los números naturales, garantiza que todo subconjunto de números naturales tiene un primer elemento. Para el caso de los cardinales transfinitos el que comienza la lista es $\aleph_0$, el cardinal de los conjuntos enumerables. Tal como los propuso Cantor, los cardinales transfinitos tienen por cardinal $\aleph_0$. De esta aseveración surge la primera paradoja, de las muchas que van a aparecer en la teoría de conjuntos. Concretamente, $\aleph_0$, por ser el primer cardinal transfinito es menor que todos los demás. Por otro lado, por ser el cardinal de todos los cardinales transfinitos debería ser el mayor de todos ellos, o sea, $\aleph_0 > \aleph_0$. Esto contradice la definición de un buen orden. Un cardinal no puede ser mayor que si mismo. A esta paradoja llegó Burali-Forti y posteriormente arribaría también Cantor.

Cavalieri, un discípulo y amigo de Galileo, introdujo un método relacionado con la concepción de que los sólidos se pueden seccionar en tajadas muy delgadas y compararlas con similares secciones de otros sólidos. La conclusión a la que llega Cavalieri es que si esas secciones tienen la misma área los sólidos deben tener el mismo volumen. Lo interesantes aquí es que se hace una especie de inducción transfinita por cuanto se habla de todo corte lo que significa una pluralidad de al menos de cardinal igual al de los números reales. Visto desde la perspectiva de Leibniz estas secciones tienen un grosor de magnitud diferencial, digamos *dx*. Es basado en este método que Cavalieri calcula áreas de superficies y volúmenes de sólidos.

1.5 – Newton, Leibniz y el uso de los infinitesimales.

Tanto Newton como Leibniz descendieron a lo infinitamente pequeño guiados por la idea intuitiva de que las curvas, en su constitución micro formal, son un agregado de infinitos segmentos de recta. Esos pequeños trozos, para Leibniz fueron los diferenciales. Para Newton, sin embargo, por su enfoque dinámico, los mismos tenían el comportamiento de los vectores, como los entendemos hoy, con una dirección y un sentido pero de dimensión infinitamente pequeña, a estos pequeños trozos les dio el nombre de *fluxiones*.

Sobre los infinitesimales se ha hablado mucho desde los tiempos de Newton. En sentido crítico, el obispo George Berkeley (1685-1753) decía refiriéndose a las fluxiones de Newton "*ciertos números que para algunas cosas son cero y para otras cosas no*". Todo el cálculo infinitesimal, que ha seguido la tendencia de Leibniz, en lo conceptual como en lo simbólico, sigue teniendo vigencia y es de eso que trata el análisis matemático, cuya esencia radica en el concepto de infinito actual, el que vendría a ser introducido, con todos sus fierros, como se dice, por Cantor y sus contemporáneos. A los infinitesimales se los trató con alguna desconfianza, después de la aritmetización del análisis, hecha sobre todo por Weierstrass, a fines del siglo XIX, cuando el concepto de continuidad se hizo depender de valores $\varepsilon - \delta$ y con el apoyo descriptivo de la lógica. Hasta mediados del siglo XX los infinitesimales se consideraban desterrados del análisis. La teoría de modelos iniciada por Alfred Tarski (1902-1983) y aplicada luego por Abraham Robinson (1918-1974) en los años 1960, permitió rehabilitar los infinitesimales en las matemáticas, al crear modelos no estándar en los que se podía lógicamente dar cabida a números infinitamente pequeños (pero no nulos) como a números infinitamente grandes. Este nuevo conjunto usualmente se denomina, conjunto de los hiperreales. Los hiperreales, desde luego, pierden una característica de los reales como es la *propiedad arquimediana*, que garantiza que todo real *y* se puede superar con *nx*, no importa que tan pequeño sea *x*, si se escoge un *n*, lo suficientemente grande.

1.6 – Cantor y los cardinales transfinitos.

Desde el tiempo de Galileo y Cavalieri, se estaba haciendo un manejo del concepto de infinito, en los dos sentidos: en lo infinitamente grande (Galileo) y en lo infinitamente pequeño (Cavalieri). Lo infinitamente pequeño lo aprovecharían Newton y Leibniz en el Cálculo infinitesimal, mientras que lo infinitamente grande sería la materia prima para que Cantor iniciara su, aun básica teoría de conjuntos. Cuando Cantor entra a explorar esta nueva área de las matemáticas, los conjuntos no eran objeto de estudio de los matemáticos. David Hilbert hace gran apología de Cantor, al afirmar que su creación es "*el fruto más admirable de una mente matemática y uno de los más altos logros de los procesos intelectuales del hombre*"[6]. Cantor llega a los conjuntos, más específicamente a subconjuntos de números reales, por su necesidad de indagar sobre la convergencia de ciertas series de Fourier. Las series de Fourier intentan aproximar trayectorias poco convencionales, como por ejemplo, los dientes de un serrucho o un arabesco decorativo. La periodicidad de estas figuras permite aproximarlas por series constituidas por sumas lineales de senos y cosenos. Los puntos donde estas series convergen se agrupan en conjuntos que llegan a ser infinitos. Ese fue el punto de partida hacia la teoría de conjuntos.

De un lado Dedekind contribuirá con un enfoque nuevo a la concepción de los números reales, como un conjunto susceptible de formalización, dotándolo de cierto atributo que lo identifique, como es, por ejemplo, el axioma del extremo superior, el que se desprende de las llamadas cortaduras de Dedekind. Frege por su parte, busca la formalización de los números naturales, introduciendo en ellos, el concepto de orden, y de allí, una propiedad que los caracteriza como es el buen orden, que en plana retórica dice que, todo conjunto de naturales tiene siempre un primer elemento.

Es sobre Georg Cantor que recae la mayor responsabilidad en la creación de la teoría de conjuntos. Desde luego que quien sirvió de caja de resonancia para que la teoría de conjuntos despegara como una gran teoría, fue David Hilbert. Su interés en la nueva teoría, radicaba en la importancia que la misma tenía como soporte a su programa de formalización. Su programa ya había dado sus frutos con la formalización de la geometría euclidiana, en *Grundlagen der Geometrie* (Fundamentos de Geometría) de 1899. Al formalizar la geometría buscaba hacer lo mismo con el análisis, en el que juegan rol importante, los conjuntos infinitos. Su programa tuvo sus seguidores; entre los más destacados, Zermelo y Fraenkel y posteriormente John von Neumann (1906-1957) y Jacques Herbrand (1908-1931).

Son precisamente Ernst Zermelo (1871-1953) y Abraham Fraenkel (1891-1965), quienes logran axiomatizar la teoría de conjuntos como la conocemos hoy. Desde luego que, ha sido necesario agregar otros axiomas como el *Axioma de Elección* (Axiom of Choice), a fin de poder desarrollar teorías más avanzadas que den cuenta de procesos de mayor complejidad que se presentan en el estudio de los números reales. El axioma de elección, afirma, *grosso modo*, que en toda familia de conjuntos es posible definir una función que asocie a cada conjunto de la familia, un elemento de ese conjunto. Esa función *electora*, permite garantizar que existe un orden (no conocido hasta ahora, por nadie) que bien ordene a los números reales, es decir, que cualquier conjunto de reales, bajo este orden tiene un primer elemento. Este enunciado se conoce como el *Principio de buena ordenación.* Cosa que no es posible con el orden convencional, "<", usado en nuestras matemáticas corrientes, donde por ejemplo, en el intervalo (0,1) no sabemos cuál es su primer elemento.

---

[6] Citado en KRAMER, E. E. *The Nature and Grow of Modern Mathematics.* Hawthorne Books, Inc. New York. 1970.

El P*rincipio de buena ordenación*, se muestra como consecuencia del axioma de elección y también de éste, se siguen enunciados importantes en análisis, como: el *Lema de Zorn* y *El Principio Maximal de Hausdorff*. Por lo tanto el axioma de elección es demasiado importante en el desarrollo del análisis matemático moderno. Las primeras paradojas en la teoría de conjuntos, no se hicieron esperar. Decíamos que el matemático italiano Cesare Burali-Forti (1861-1931) en 1897 detectó la primera paradoja, confirmada más adelante por Cantor. Otra paradoja relacionada a la anterior es la conocida *Paradoja de Russell* sobre la existencia o no del conjunto de todos los conjuntos. Este conjunto debe contenerse así mismo, por ser un conjunto. Sin embargo hay otros conjuntos que no se contienen a sí mismos, como es el caso del conjunto de todos los estudiantes, que no es un estudiante. Sea W el conjunto de todos los conjuntos que no se contienen así mismos. Entonces viene la pregunta: ¿Es W un miembro de sí mismo? Si W está en W entonces no se tiene así mismo y así W no está en W. Si no está en W, entonces W no se contiene así mismo y por lo tanto W está en W. Ahí claramente está la contradicción. Esta paradoja se evita con la introducción de la teoría de tipos, teoría desarrollada por Bertrand Russell a comienzos del siglo XX.

2 – La hipótesis de Cantor y la teoría de conjuntos.

El marco de referencia natural, donde fue propuesta la hipótesis de Cantor o hipótesis del continuo, fue la teoría de conjuntos que empezaba a ser axiomatizada a fines del siglo XIX. En ese marco la propuso Hilbert, con las siguientes palabras:

> "*Cada sistema de infinitos números reales, es decir, cada conjunto de números (o puntos), es, o equivalente al conjunto de los números naturales, 1, 2, 3,…, o equivalente al conjunto de todos los números reales y por lo tanto al continuo* (*los puntos de la recta; mirados equivalentes*). *Así, hay dos tipos de conjuntos de números, los conjuntos contables y el continuo*".

La primera observación que podemos hacer a este enunciado, es el énfasis que Hilbert pone a la identificación de los números reales con el continuo. La segunda observación es la seguridad con que manifiesta que el enunciado citado es un "Teorema", haciendo gala del optimismo y confianza que tenía en las herramientas matemáticas a su disposición para encontrar la prueba, a todo enunciado, que estuviera bien formulado, en una teoría matemática. Para este caso, la teoría de conjuntos.

Cantor respondió a la pregunta de cuántos números reales hay, probando que hay más, de los que se pueden contar con el conjunto **N** de los números naturales[7]. Al no poder establecer una correspondencia entre los reales y los números naturales, Cantor decidió asociar con los números reales un cardinal (número de elementos) mayor que aquel $\aleph_0$ ($\aleph$ es la primera letra del alfabeto hebreo), ya adscrito a los números naturales. Puesto que todo número real se puede expresar como

[7] Igual ocurre con los enteros, los racionales o aún, con los números algebraicos, que aparentemente lucen más numerosos. Uno de los grandes logros de Cantor fue mostrar que todos estos conjuntos son enumerables, en el sentido de, poderse establecer una biyección (una correspondencia biunívoca) entre cada uno de ellos y los números naturales.

una sucesión infinita de 0´s y 1´s [8], el cardinal, o la potencia, como a veces se dice, de **R**, será igual al número de sucesiones de este tipo, el cual viene dado por

$$2^{\aleph_0}.$$

La razón por la cual encontramos este número es que, para escoger en el conjunto {0,1} el primer dígito binario para cada real, hay dos posibilidades; para escoger el segundo hay, las mismas dos, y así hasta agotar todos los naturales (de potencia $\aleph_0$); por lo cual encontraremos: $2\times 2 \times 2 \times \ldots$ posibilidades de dotar a cada real de sus infinitos dígitos. Ese valor es precisamente el número, dado arriba. El conjunto de funciones de **R** en **R**, tendrá, desde luego, un cardinal mayor que el de **R**, y, a medida que avanzamos en este proceso se irán creando cardinales cada vez mayores. Se sigue de aquí que habrá infinitos cardinales transfinitos.

Es costumbre denotar con *c*, el cardinal del continuo, que según Hilbert, es el mismo que el de los números reales. Así la hipótesis del continuo se reduciría a la igualdad:

$$c = \aleph_1.$$

Así de simple es la hipótesis de Cantor o *hipótesis del continuo* (CH), que nos tiene en ascuas, desde que David Hilbert la propuso a la comunidad matemática reunida en Paris en el Congreso Internacional de Matemáticos de 1900. Es el número uno, de la lista de veintitrés problemas dejados por su generación a las generaciones que le sucedieron. Para Hilbert este problema está bien formulado en el lenguaje inteligible de las matemáticas, y en concordancia con su filosofía, el problema debe tener una solución, positiva, negativa, o una prueba de su indecidibilidad. En matemáticas *no hay ignorabimus*, decía.

Por la forma en que los cardinales aparecen en la lista, de menor a mayor, y sabiendo, como el mismo Cantor probó, que,

$$\aleph_\alpha < 2^{\aleph_\alpha}$$

Surge otra conjetura como es la hipótesis generalizada del continuo (GCH), la cual afirma que:

$$2^{\aleph_\alpha} = \aleph_{\alpha+1}.$$

Donde $\aleph_\alpha$ es un cardinal transfinito arbitrario en la lista de Cantor. Con esto se cierra, en forma abrupta, la puerta de entrada a otros cardinales transfinitos, al paraíso de Cantor, como Hilbert llamó a la teoría originada en los trabajos del matemático alemán en estos temas.

3 Historia reciente de la hipótesis de Cantor.

[8] De igual forma que se puede expresar un número real en forma decimal, uno puede hacerlo en forma binaria. Esta representación es única salvo repetición continua de 1´s. Por ejemplo, 0.1111… = 1.0000… .

3.1 – Los trabajos de Gödel y de Cohen sobre la independencia de la hipótesis del continuo.
Uno de los grandes interrogantes en la teoría axiomática de conjuntos, es saber si la teoría de conjuntos con la axiomatización de Zermelo-Fraenkel adicionada con el axioma de elección (C), notada, ZFC, es consistente. Esto significa encontrar un criterio para determinar si de la teoría ZFC se pueden deducir por medios lógicos alguna contradicción. Hasta hoy los ataques a la solución de la hipótesis del continuo parten de la consistencia de ZFC. Si este no fuera el caso, de esta teoría, se podría deducir lógicamente, cualquier cosa, por absurda que parezca.

El primer ataque a CH con resultado parcial, lo logró Kurt Gödel, al probar que si ZFC es consistente también lo es ZFC + CH. Hasta aquí lo que se está probando es que, si a la teoría de conjuntos se le agrega la hipótesis del continuo, la nueva teoría sigue siendo consistente, mientras la primera lo sea. Queda la duda de que si CH es verdadera entonces su negación tiene que ser falsa. Esta primera parte se conoce como el teorema de Gödel, cuya demostración se basa en sus trabajos relacionados con los teoremas de incompletitud que lo hicieron famoso. En efecto, Gödel probó que la negación de la hipótesis del continuo no se puede probar si se acepta la consistencia de ZFC.

En diciembre de 1933, en una conferencia en el congreso conjunto de la MAA y la AMS[9] en Cambridge, Massachusetts, titulada "El estado actual de los fundamentos de las matemáticas", sostenía que la solución al problema de dar una fundamentación a todas las matemáticas, que evitara las paradojas tipo Russell, habría que buscarla tomando como marco de referencia, los conjuntos organizados jerárquicamente en niveles o tipos. Comenzando desde abajo, con un conjunto de "individuos", luego en el siguiente nivel, estos individuos junto a los conjuntos formados por estos individuos. Cada nuevo nivel se forma con los elementos del nivel que le precede adjuntando los conjuntos formados con los conjuntos de elementos de este nivel previo. De esta manera uno construye una estructura en forma de V, cuyo elemento en el vértice inferior denotado V_o puede tomarse como $\varnothing$ (el conjunto vacío), luego V_1, V_2,…, pero como Gödel enfatizó, no hay razón para detenerse allí. Podemos seguir adelante con:

$$V_\omega = \bigcup_{n=0}^{n=\infty} V_n$$

y continuar el proceso.

Es claro que $V_n \subseteq V_{n+1}$. Pero el proceso puede continuar con $V_{\omega+1} = \mathscr{P}(V_\omega)$, donde $\mathscr{P}$ significa el conjunto potencia, esto es, el conjunto formado con los conjuntos de V_ω, tomados aquí como elementos.

En la teoría de conjuntos contemporánea esta jerarquía aun se extiende de forma que los subíndices de V varíen en ordinales λ de mayor orden. Gödel explicó en aquella ocasión que una fundamentación para las matemáticas dependería de los axiomas para esta jerarquía de tipos, con las reglas de inferencia de la lógica de Frege usadas para probar teoremas en base a estos axiomas. También, un sistema de axiomas para la teoría de conjuntos puede entenderse que depende de propiedades de clausura, que garanticen el proceder, de la existencia de conjuntos dados, a la existencia de otros conjuntos formados por ellos. Al formar el conjunto menor de la jerarquía,

[9] *Mathematical Association of America* y *American Mathematical Society*, respectivamente.

cerrado con relación a estas operaciones uno obtiene un conjunto que pertenece a la jerarquía; sin embargo, la existencia previa de este conjunto no podría probarse con el soporte de estos axiomas. Esto es así porque uno podría recurrir a la existencia de este conjunto para probar la consistencia de los axiomas dados en razón a estos mismos axiomas, lo cual había demostrado Gödel que era imposible. Este conjunto puede considerarse como un nuevo dominio de individuos y tomarse como punto de partida para crear nuevos tipos de mayor jerarquía. Gödel en su conferencia, continúa explicando la relación entre esta situación y el teorema de incompletitud en los siguientes términos:

> "… estamos enfrentados a una extraña situación. Frente al reto de encontrar un sistema formal para las matemáticas; encontramos un infinito número de sistemas, y en cualquiera de ellos que se escoja…, hay otro…cuyos axiomas son más fuertes.
> Pero… este carácter de nuestro sistema… está en perfecto acuerdo con ciertos hechos, los cuales pueden establecerse independientemente… Para cualquier sistema formal se puede construir una proposición – en efecto – de la aritmética de los naturales la que es ciertamente verdadera si el sistema dado está exento de contradicciones, pero no puede probarse en el mismo sistema. Ahora si el sistema en consideración (llamémoslo S) se basa en la teoría de tipos, resulta que… esta proposición llega a ser un teorema probable si adicionamos a S el siguiente tipo de mayor jerarquía y los axiomas correspondientes"[10]

Gödel también trabajó en la década del treinta del siglo pasado en la hipótesis del continuo de Cantor (CH). Esta hipótesis afirma que los conjuntos infinitos de números reales vienen solamente, digámoslo así, en dos tamaños: cada uno de estos conjuntos es contable (finito o enumerable) o tiene la misma cardinalidad de todo el conjunto de los números reales. Mencionábamos antes que esta hipótesis, muy trabajada por Cantor, encabezaba la lista de los famosos veintitrés problemas de Hilbert. Gödel fue capaz de probar que si los sistemas usuales de axiomas de la teoría de conjuntos (incluyendo, en particular, los llamados axiomas de Zermelo, Fraenkel) son consistentes, entonces ellos permanecen consistentes si el axioma de elección y CH se agregan a estos sistemas.

La principal herramienta para la prueba del anterior resultado es una modificación de la jerarquía acumulativa, discutida arriba, El lenguaje de la teoría de conjuntos (que como recordarán incluye el lenguaje de la lógica) puede usarse, no sólo para expresar proposiciones, si no también para definir conjuntos. Por ejemplo, la fórmula

$$\neg(\exists y)(y\in x) \vee [(\exists y)(y\in x) \wedge (\forall z)(\mathrm{z}\in x \supset \neg(\exists y)(y\in z))]$$

Se satisface solamente si *x* es el conjunto vacío o contiene un solo elemento, digamos el conjunto vacío. Uno dice que esta fórmula define el conjunto $\{\varnothing, \{\varnothing\}\}$. En general, dado cualquier conjunto S, uno puede considerar subconjuntos de S definibles por fórmulas del lenguaje de la teoría de conjuntos. Estas fórmulas usadas para estas definiciones permiten contener *parámetros* que representan elementos particulares de S. Así, si S = $\{\varnothing, \{\varnothing\}\}$. La fórmula $x = \{\varnothing\}$, que contiene el parámetro $\{\varnothing\}$ define el subconjunto $\{\{\varnothing\}\}$ de S.

---

[10] GÖDEL, K. *Collected Works* (FEFERMAN, S. et al. eds.). Vol. II. Oxford University Press. 1990.

Vamos a escribir $\mathscr{D}$(S) para denotar la colección de todos los subconjuntos de un conjunto dado S, que pueden definirse de esta manera (a través de fórmulas bien formadas en el lenguaje de la teoría de conjuntos). Evidentemente, para cada conjunto S, $\mathscr{D}(S)\subseteq\mathscr{P}(S)$. Notemos que si S es contablemente infinito, esta inclusión es propia: $\mathscr{P}$(S) es incontable (en efecto tiene la cardinalidad del continuo), mientras que, ya que sólo hay un número contable de fórmulas, $\mathscr{D}$(S) es contable. Ahora, justamente como la jerarquía acumulativa está definida por reiteraciones indefinidas, del operador potencia $\mathscr{P}$, Gödel define lo que él llama conjuntos construibles, como aquellos que se obtienen empezando con $\varnothing$, e indefinidamente iterando el operador $\mathscr{D}$. La definición precisa se logra por recursión transfinita:

$$L_0 = \varnothing\ , \qquad L_{\alpha+1} = \mathscr{D}(L_\alpha) \qquad L_\lambda = \bigcup_{\alpha<\lambda} L_\alpha \quad \text{(donde } \lambda \text{ es un ordinal límite).}$$

Los conjuntos construibles son aquellos que pertenecen a alguno de estos L_α. Gödel introdujo la proposición siguiente:

A: *Todo conjunto es construible.*

En relación a esta proposición, probó que:

i) A es consistente con ZF,
ii) A implica el axioma de elección,
iii) A implica CH,
iv) A implica que $2^{\aleph_\alpha} = \aleph_{\alpha+1}$. Este resultado se conoce como la hipótesis generalizada del continuo (GCH).

En el anuncio de este resultado Gödel decía en 1938 “la proposición A, adicionada como un nuevo axioma parece dar una complementación general a los axiomas de la teoría de conjuntos, hasta cuando se determine, en forma definitiva, el concepto vago de, conjunto infinito arbitrario.

Hubo que esperar hasta 1966, cuando Paul Cohen (Medallista Fields, Moscú, 1966) probó, la contraparte pendiente, desde el resultado de Gödel veinticinco años antes. Es decir, Cohen probó que si ZFC es consistente, también lo será ZFC + no CH. O sea la negación de la hipótesis del continuo se puede agregar a ZFC y el sistema sigue consistente, si el primero los es. El método de Cohen inauguró una nueva época en la teoría de conjuntos, como Gödel afirmara después de leer el artículo y recomendarlo para publicación: “Usted ha logrado el avance más importante, desde la axiomatización de la teoría de conjuntos”[11].

El artículo se publicó en los *Proceedings of the National Academy of Sciences.* El nuevo método usado por Cohen lleva el nombre de *Forcing.* Juntando los dos resultados, se concluye que CH es independiente de ZFC y así quedamos, como estábamos en tiempos de Cantor sin saber si la hipótesis del continuo es verdadera, falsa o indecidible. La independencia, garantiza (supuesto ZFC es consistente) que se puede hacer matemáticas con la hipótesis del continuo, o igualmente con su negación. Es algo parecido a lo que sucede con el postulado de las paralelas, en geometría,

[11] Ver: YANDELL, V. H. *The Honor Class. Hilbert´s Problems and Their Solvers.* A. K. Peters. Boston. 2002. Pág. 68.

donde se puede hacer geometría euclidiana, aceptando el V postulado o hacer geometrías no euclidianas, negándolo.

Los últimos cinco años han visto toda una cascada de artículos relacionados con CH, y con cardinales llamados inaccesibles, que buscan complementar la teoría de conjuntos con axiomas cada vez más fuertes. Los trabajos de Woodin y Shelah, citados abajo son muestras importantes de las tendencias investigativas en años recientes en relación con el tema.

Bibliografía

COHEN, P. J. *Set Theory and the Continuum Hypothesis*. With a new introduction by Martin Davis. Dover Publications. New York, 2008.

FEFERMAN, A. et al. *Alfred Tarski. Life and Logic*. Cambridge University Press. New York. 2005.

DAVIS, M. *Logical Dilemmas: The Life and Work of Kurt Gödel by John W. Dawson, Jr*. Book Review. Notices of the American Mathematical Society. Vol. 48. No. 8. September 2001.

PAREJA-HEREDIA, D. *Aproximación a la Epistemología de las Matemáticas.* Notas de clase. Asequibles en: www.matematicasyfilosofiaenelaula.info

SHELAH, S. *Logical Dreams.* Bulletin (New Series) of the American Mathematical Society. Vol. 40. No. 2. April 2003.

WOODIN, H. *The Continuum Hypothesis. Part I.* Notices of the American Mathematical Society. Vol. 48. No. 6. June/July. 2001.

WOODIN, H. *Large Cardinal Axioms and Independence: The Continuum Problem Revisited*. The Mathematical Intelligencer. Vol. 16, No. 3. Summer 1994.

Revisión:
Doy excusas por los muchos errores aparecidos en la primera versión. Los errores que quedan, de los que me siento responsable, serán corregidos en la medida en que vuelva sobre este interesante tema.

Armenia, Octubre de 2014.