HISTORIAS DE LAS MATEMÁTICAS

1 - La historia de Srinivasa Ramanujan (1887-1920)

Busto de Srinivasa Ramanujan creado por el escultor Americano Paul Granlund.

SRINIVASA RAMUNUJAN

Diego Pareja Heredia. *Universidad del Quindío*

Buena parte del prestigio adquirido por el matemático inglés, Godfrey H. Hardy (1877-1947) se debe al descubrimiento del genio y matemático hindú Ramanujan (se pronuncia Ramánuyan). Según cuenta, C. P. Snow[1], todo comenzó una mañana de Enero 1.913, cuando entre otras muchas cartas colocadas sobre la mesa del desayuno, Hardy descubrió una con estampilla de la India, cuyo sobre llamaba la atención por la forma poco convencional en que estaba escrito. Abrió el sobre, y en su interior encontró varias hojas manuscritas llenas de símbolos y enunciados de teoremas extraños, los que Hardy, nunca había imaginado.

Aunque, como buen inglés, Hardy siguió en su rutina diaria, la carta recibida esa mañana y firmada por un hindú desconocido se quedó trabajando en su subconsciente. De regreso a su residencia en Trinity College al anochecer, envió un recado a John E. Littlewood (1885-1977), su colaborador científico inseparable, invitándolo a analizar detenidamente el manuscrito recibido en la mañana. Antes de medianoche habían llegado a la conclusión de que el autor de aquellas notas, Srinivasa Ramanujan, debía ser un auténtico genio de la talla de Gauss y Euler.

Al siguiente día Hardy entró en acción. Ramanujan debía ser invitado a Inglaterra, Trinity College ayudaría a sufragar los gastos que esto implicara. Se supo después que Ramanujan era un hombre autodidacta y pobre, quien trabajaba como empleado en Madras con un salario mísero de 20 libras esterlinas al año. Después de vencer múltiples dificultades, en abril de 1.914 arribó Srinivasa Ramanujan a Inglaterra.

Lo que sabemos de la vida de Ramanujan lo debemos a los matemáticos hindúes, P.V. Seshu Aiyar y R. Ramachandra Rao, quienes fueron sus amigos y admiradores. El mismo Hardy se refiere a artículos publicados por Aiyar y Rao en el *Journal of de Indian Mathematical Society*, para acotar algunos aspectos de la vida de Ramanujan en su artículo publicado en los *Proceedings of the London Mathematical Society* [7].

Ramanujan nació en la ciudad de Erode al sur de la India el 22 de Diciembre de 1.887. Su padre fue un contabilista en Kumbakonam, ciudad ésta, donde Ramanujan terminó la secundaria. Aquí ya se conocieron

[1] HARDY, G. H. With a foreword of C. P. Snow. *A Mathematician's Apology.* Cambridge University Press. Cambridge, 1992.

sus habilidades y su sorprendente facilidad para verificar los resultados del libro de Carr *Sinopsis of Pure Mathematics*, el que conseguía prestado de la biblioteca del colegio. Su extraordinaria memoria le permitía repetir la lista completa de raíces del Sanscrito y podía dar los valores de $\sqrt{2}, \pi,\ e,$ con gran número de cifras decimales.

Aunque obtuvo una beca para estudiar en la Universidad de Kumbakonam, por su bajo rendimiento en la lengua inglesa, la perdió y se vio obligado a viajar primero a Vizagapatam y luego a la ciudad de Madras (su nombre hoy es, Chennai). Después de fracasar en un examen de ingreso en una universidad local, optó por continuar su trabajo en matemáticas independientemente.

En 1.909 se casó y se propuso hallar un empleo para poder subsistir. Fue por esta época que decidió mostrar sus apuntes matemáticos a Seshu Aiyar quien viendo lo novedoso de los resultados de Ramanujan, lo envió con una carta de recomendación, donde el conocido matemático hindú, Ramachandra Rao, quien al reconocer el gran talento de Ramanujan decidió sugerirle que permaneciera en Madras y que él correría con sus gastos por un tiempo, hasta conseguir una beca que le permitiera continuar sus estudios en matemáticas. Al no lograr admisión decidió aceptar un inestable puesto en Madras.

Sin embargo continuó trabajando en matemáticas y como resultado de esto, en 1.911 publicó en el *Journal of the Indian Mathematical Society*, su primer artículo, *Algunas propiedades de los números de Bernoulli* [6].

Por sugerencia de Aiyar, Ramanujan decidió escribir a Hardy y comentarle sobre los resultados obtenidos en relación con los números primos y sobre sus avances en el cálculo del orden de la función (desconocido por Hardy):

$$\rho(x) = \pi(x) - \int_2^x \frac{dt}{\log t},$$

Donde π (x) denota el número de primos menores o iguales que x.

En su primera carta a Hardy, casi imploraba, se le diera una oportunidad para publicar sus resultados en teoría de números y esperaba consejo para superar, las condiciones adversas a sus deseos de llegar a ser un gran matemático.

Entre los apuntes que Hardy recibió por primera vez de Ramanujan había enunciados de más de cien teoremas. Muchos de ellos eran novedosos, otros, correspondían a redescubrimientos de resultados ya obtenidos por matemáticos de otras partes y otras épocas, a quienes, Ramanujan ignoraba por completo.

En su segunda carta a Hardy, fechada en Febrero 27 de 1.913 [4]. Escribía “He encontrado en usted, un amigo que simpatiza con lo que yo he hecho. Esto es ya, un estímulo para poder continuar en mi lucha…. Para preservar mi cerebro necesito alimento y ésta es ahora mi primera preocupación. Cualquier recomendación suya, me será muy valiosa como medio para conseguir una beca, ya sea de la universidad o del gobierno…”

Hardy había escrito al secretario para asuntos estudiantiles hindúes en Londres en el sentido de que se debían conseguir fondos para patrocinar el estudio en Cambridge, a quien como Ramanujan, podía demostrar ser un matemático importante. La inquietud de Hardy fue pasada al comité de consejería de la Universidad de Madras, el cual preguntó a Ramanujan si quería ir a estudiar a Cambridge. Sus sentimientos religiosos eran muy fuertes y para no contravenir los mandatos de su religión se negó a aceptar el ofrecimiento hecho por la Universidad de Madras. Esto ocurría en Marzo de 1.913.

Por este mismo tiempo, el caso de Ramanujan había llegado a la Universidad de Madras, por otro conducto. En Febrero de 1.913, el Dr. G.T. Walker, director general de Observatorios y egresado del Trinity College, Cambridge, fue a Madras en visita oficial. Al ser informado de las aptitudes de Ramanujan solicitó del Director de Registro de la Universidad la ayuda para que la institución ofreciera una beca a Ramanujan para que éste, pudiera dedicarse a explorar las matemáticas sin angustias económicas.

Con aprobación del gobierno, la Universidad de Madras adjudicó a Ramanujan una beca de 250 libras al año para que adelantara estudios en Inglaterra por 2 años. Desde este momento Ramanujan pasó a ser un matemático profesional.

La noticia de que Ramanujan no viajaría a Inglaterra por prejuicios religiosos preocupó mucho a Hardy, quien le insistía que una corta temporada en Cambridge sería para él, muy ventajosa. Aprovechando el viaje del profesor E. H. Neville a dictar un curso en la Universidad de Madras, Hardy comisionó a éste, para que indujera a Ramanujan a abandonar sus prejuicios y viajara al exterior. Igual trabajo venían desarrollando amigos y empleados de la universidad, hasta el punto que Ramanujan ya había cambiado de parecer y sólo quedaba el problema de convencer a su madre. La aprobación de su progenitora, vino más fácil de lo que se esperaba, pues en un sueño, ella había recibido de la diosa Namagiri, la insinuación de que permitiera a su hijo satisfacer su anhelo de llegar a ser un matemático.

Tan pronto como obtuvo el consentimiento de Ramanujan, el Dr. Neville envió a las autoridades de la Universidad de Madras, el siguiente memorando [7].

"El descubrimiento del genio Srinivasa Ramanujan, promete ser el evento más interesante de nuestro tiempo en el mundo matemático... No dudo que Ramanujan, responderá positivamente al estímulo que le va a producir el contacto, con matemáticos de primera línea en el mundo occidental. En ese caso, su nombre llegará a ser, uno de los más grandes, en la historia de las matemáticas. La universidad y la ciudad de Madras se sentirán orgullosas de haberle permitido pasar, de la oscuridad a la fama".

Es sorprendente ver en las líneas anteriores como el Dr. Neville vaticinó el futuro brillante de Ramanujan, que a no dudarlo, pasará a la posteridad, junto a figuras tan importantes como Evarist Galois (1811-1932) y Niels H. Abel (1802-1829), que al igual que Ramanujan, murieron jóvenes y dejaron tras de sí una estela grandiosa de creatividad, originalidad y genio.

La beca ofrecida a Ramanujan por la universidad de Madras fue luego prorrogada hasta Abril de 1.919. Esta incluía gastos de pasajes, viáticos y 250 libras anuales, de las cuales la Universidad dejaría una cantidad razonable para el sostenimiento de su madre. Al ser admitido en el Trinity College se le ofrecieron 60 libras adicionales, que garantizaban para Ramanujan una completa solvencia económica.

A Hardy y Littlewood cupo el honor de ser sus orientadores y maestros en Inglaterra. Hardy afirmaba que, un solo maestro era muy poco para tan fértil alumno. De 1.914 a 1.917 se mantuvo en actividad ininterrumpida. Hasta el 16 junio de 1.916 Ramanujan había publicado 16 artículos en las más prestigiosas revistas científicas europeas.

En el verano de 1.917 contrajo una enfermedad incurable que lo llevaría a la muerte en 1.920. Inicialmente se pensó en tuberculosis. Sin embargo recientes investigaciones sugieren que pudo tratarse de una afección parasitaria hepática[2]. A pesar de sus dolencias, continuaba escribiendo artículos y trabajos matemáticos. En 1.918 fue aceptado como miembro de la *Royal Society of London* y como *fellow* del *Trinity College*, Cambridge. Así llegó a ser, el primer hindú, en obtener tan honrosas distinciones.

En su corta vida intelectual su creatividad fue exuberante: 21 artículo publicados en Europa y 12 en el *Journal of the Indian Mathematical Society*, además de resúmenes y notas cortas hechas en los *Records of*

[2] En la entrega de Junio/Julio, 2006, de las Notices de la American Mathematical Society, Ken Ono, en un interesante artículo, sostiene esta tesis.

the Proceedings de la *London Mathematical Society*. A lo anterior hay que agregar los problemas propuestos y resueltos por él en el *Journal of the Indian Mathematical Society*.

En 1.957 el *Tata Institute of Fundamental Research* de Bombay publicó en dos voluminosos tomos, el contenido de igual número de cuadernos de Ramanujan que habían quedado inéditos. Aquí Ramanujan trata temas que van desde cuadrados mágicos hasta la función zeta de Riemann, pasando por algunos tópicos de teoría de números, convergencia de series y funciones elípticas [5].

Entre los resultados obtenidos por él, en relación con la teoría de números, se pueden destacar las soluciones de la ecuación de Euler,

$$x^3 + y^3 + z^3 = w^3 .$$

Dadas por:

$x = 3a^2 + 5ab - 5b^2$; $y = 4a^2 - 4ab + 6b^2$; $z = 5a^2 - 5ab - 3b^2$; $w = 6a^2 - 4ab + 4b^2$,

donde $a, b \in \mathbf{Z}$. Y también por

$x = m^7 - 3m^4(1+p) + m(2+6p+3p^2)$, $y = 2m^6 - 3m^4(1-p) + m(2+6p+3p^2)$

$z = m^6 - 3p - 3p^2$, $w = m^4 - 3m^4 p + m(3p^2 - 1)$, $m,\ p \in \mathbf{Z}$.

Como mencionábamos, muchos de los resultados obtenidos por Ramanujan son redescubrimientos, como fue el caso, por ejemplo, del teorema de Christian Von Staudt acerca de los números de Bernoulli. Este teorema puede formularse recurriendo a la fórmula

$(-1)^n B_n = G_n + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + ... + \frac{1}{p} + \frac{1}{q} + \frac{1}{r}$, donde B_n, es el n-ésimo número de Bernoulli, donde los denominadores son primos impares tales que p-1, q-1, r-1, son divisores de $2n$ y $G_n \in \mathbf{Z}$.

Dio fórmulas para el número de formas en que un número puede expresarse como la suma de dos, cuatro, seis y ocho cuadrados, algunas de la cuales, ya habían sido descubiertas por el matemático alemán Jacobi en el siglo XIX.

También encontró el teorema de Legendre que afirma que *n* es la suma de tres cuadrados, excepto cuando es la de la forma: $4^a(8k+7)$, donde $a, k \in \mathbf{Z}$.

Como la mayoría de los grandes matemáticos, Ramanujan tenía en los números naturales su fuente de inspiración. J. E. Littlewood decía de él, que tenía en cada número entero, un amigo personal. Hardy narra una anécdota que confirma, la anterior apreciación. Una ocasión, en visita al hospital, donde Ramanujan, estaba recluido, le contó que para ir a verlo tomó un taxi, cuyo número, según recordaba, era el 1729, y que según él, no tenía nada de especial y así, no presagiaba buenos augurios. Al respecto Ramanujan exclamó: "¡No!, 1.729 es un número muy interesante; es el menor número entero, que puede expresarse, como la suma de dos cubos en dos diferentes formas." En efecto, 1.729 = $10^3+9^3=12^3+1$.

En álgebra hizo Ramanujan, varias aportaciones, especialmente relacionadas con series hipergeométricas y fracciones continuas. Su obra maestra en estos temas es quizá su trabajo alrededor de la fracción continua:

$$\frac{1}{1+}\frac{x}{1+}\frac{x^2}{1+}\cdots$$

Uno de cuyos casos es la siguiente identidad descubierta por él:

$$\frac{1}{1+}\ \frac{e^{-2\pi}}{1+}\ \frac{e^{-4\pi}}{1+}\cdots=\{\sqrt{\frac{5+\sqrt{5}}{2}}-\frac{\sqrt{5}+1}{2}\}e^{\frac{2\pi}{5}}\ .$$

En análisis, redescubrió la ecuación funcional para la función zeta de Riemann:

$\varsigma\,(s) = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^s}$, donde, $s = \sigma + ti$, y t >1, que puede escribirse como:

$\varsigma\,(1\text{-}s) = 2(2\,\pi\,)^{-s}\,(cos\,\pi s\,/2)\,\Gamma\,(s)\ \varsigma\,(\mathrm{s})$, donde $\Gamma\,(s)$ es la función gamma de Euler.

Ramanujan llegó por sus propios medios al *teorema de los números primos* que había sido conjeturado por Gauss y probado por Hadamard y de la Valle- Poussin en 1.896. Este teorema establece que π(x) es próximo a x/logx, y esta aproximación se agudiza cuando x se hace cada vez más grande.

La obra de Ramanujan y sus consecuencias, dio suficiente material para que Hardy escribiera un libro, dedicado exclusivamente al análisis y descripción de sus principales resultados. [2].

De no haberle llegado la muerte tan temprano, sus aportes a las matemáticas se habrían multiplicado. A mediados del año 1.917 se sospechaba que Ramanujan había contraído una enfermedad incurable y era necesario recluirlo en un sanatorio de Inglaterra. Cuando experimentó una ligera mejoría se sugirió que, para una mejor convalecencia, era mejor que viajara a un clima más apropiado como el de la India. Arribó a Madras el 2 de Abril de 1.919. A pesar de los intensos cuidados médicos a que fue sometido, su salud comenzó a declinar inexorablemente. El 26 de Abril de 1.920, murió en Chetput, un suburbio de Madras.

Aún los últimos días de su vida, los dedicó a aportar cosas novedosas. En su lecho de enfermo escribió a Hardy comunicándole el hallazgo de las llamadas "*Funciones Theta Encubiertas*" ejemplo de las cuales es la función:

$$f(q) = \frac{q}{1+q^2} + \frac{q^2}{1+q^2} + \frac{q^2}{(1+q)^2(1+q^2)^2} + \ldots, \text{ que converge para } |q| < 1.$$

Sobre la vida y la obra de Ramanujan se ha exagerado un poco, y no falta quienes afirman que tuvo contacto con seres extraterrestres, quienes lo inducían a lograr sus descubrimientos. Si embargo, en la opinión de Hardy, Ramanujan fue una persona como cualquier otra, con sus propios defectos y peculiaridades, que con gran esfuerzo y vocación llegó a ser un gran matemático y para quien las creencias religiosas no eran tan acentuadas como sugieren sus coterráneos. [3].

Lo que creo debe destacarse particularmente en Ramanujan, es su deseo ferviente de aprender y de obtener, usando su intuición, generalizaciones y extensiones de diferentes áreas de las matemáticas que estuvieron a su alcance.

La vida y la obra de Ramanujan ha vuelto a cobrar actualidad debido al descubrimiento, por parte del profesor George E. Andrews de la Universidad de Pennsylvania, de un cuaderno manuscrito de Ramanujan que estuvo perdido por más de medio siglo [1]. Fotocopias de este manuscrito estuvieron a disposición de los participantes de la reunión conjunta de la *American Mathematical Society* y de la *Mathematical Association of América* celebrada en el verano de 1977 en la ciudad de Seattle.

Es interesante destacar, que la obra del matemático hindú en teoría de números sigue siendo objeto de un examen serio y enriquecedor. Muestra de esto es la reciente aparición de una gran variedad artículos que tratan temas relacionados, con las funciones theta encubiertas, como los trabajos de Kathrin Bringmann y de Ken Ono, ambos de la Universidad de Wisconsin. Kathrin Bringmann es una superestrella de la teoría de números, con una producción sorprendente en temas tratados por Ramanujan. Ver su hoja de vida en: http://www.math.wisc.edu/~bringman/. Ken Ono, no se queda atrás. Es sorprendente que a su edad, menos de cuarenta años, haya publicado más de cien artículos, buena parte de ellos en temas relacionados con la obra del matemático hindú. Invitamos a los lectores a visitar su página en: http://www.math.wisc.edu/~ono/
.

Entre las muchas cosas que Ramanujan escribió en el manuscrito descubierto por el profesor Andrews, probablemente el último, escrito por él antes de su muerte, aparece esta fórmula de Euler:

$$\prod_{n=1}^{\infty}(1-q^{n})=\sum(-1)^{n}q^{1/2(n)(3n+1)}(1-q^{2n+1})=1-q-q^{2}+q^{5}+q^{7}-\ldots$$

B I B L I O G R A F Í A

1. ANDREWS, G. E. *A Lost Notebook of Ramanujan*. Conferencia dictada en la Universidad de Washington, Agosto 16, 1977.
2. HARDY, G. H. *Ramanujan*. Chelsea, New Cork, 1.959.
3. HARDY, G. H. A *Mathematician's Apology*. Cambridge University Press, 1967.
4. RAMANUJAN, S. *Collected Papers*. Cambridge University Press. 1.927.
5. RAMANUJAN, S. *Notebooks, Vols I, II*. TATA Institute of Fundamental Research. Bombay. 1.957.
6. The Journal of the Indian Mathematical Society, Vol III. Madras, 1.911.
7. The London Mathematical Society. Proceedings. Vol 19. London 19.2

Estampilla emitida en 1962 por los correos de la India para conmemorar el 75 Aniversario del nacimiento del famoso matemático hindú.

Nota. Este artículo fue publicado en la revista Matemática-Enseñanza Universitaria No. 4. Noviembre de 1977 y editado por el autor, en Marzo de 2007.